

Série A. N° 913

N° D'ORDRE

1733

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

Par M. R. BOULOUCH

Professeur agrégé de Physique au Lycée de Bordeaux.

1^{re} THÈSE. — THÉORIE DES SYSTÈMES OPTIQUES CENTRÉS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 4^e Décembre 1922, devant la Commission d'examen

MM. COTTON, *Président*.

FABRY,
LESPIEAU, } *Examineurs*.

BORDEAUX

IMPRIMERIES GOUNOUILHOU

9-11, RUE GUIRAUDE, 9-11

1922

Série A. N° 913

N° D'ORDRE

1733

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

Par **M. R. BOULOUCH**

Professeur agrégé de Physique au Lycée de Bordeaux.

1^{re} THÈSE. — THÉORIE DES SYSTÈMES OPTIQUES CENTRÉS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 21 Décembre 1922, devant la Commission d'examen

MM. COTTON, *Président*.

FABRY, {
LESPIEAU, } *Examineurs.*



BORDEAUX

IMPRIMERIES GOUNOUILHOU

9-11, RUE GUIBAUDE, 9-11

1922

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen. MOLLIARD, *professeur*. Physiologie végétale.

Doyen honoraire. P. APPELL.

Professeurs) P. PUISEUX.
honoraires.) VÉLAIN.
 BOUSSINESQ.
 BOUTY.

ÉMILE PICARD....	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
GASTON BONNIER..	Botanique.
KÖNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
GOUSAT.....	Calcul différentiel et calcul intégral.
HALLER.....	Chimie organique.
JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
JANET	Électrotechnique générale.
WALLERANT.....	Minéralogie.
ANDOYER	Astronomie.
PAINLEVÉ.....	Mécanique analytique et mécanique céleste
HAUG	Géologie.
H. LE CHATELIER..	Chimie générale.
GABRIEL BERTRAND.	Chimie biologique.
M ^{me} P. CURIE....	Physique générale et radioactivité.
CAULLERY.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
G. URBAIN.....	Chimie minérale.
Émile BOREL.....	Calcul des probabilités et Physique mathém.
MARCHIS.....	Aviation.
Jean PERRIN.....	Chimie physique.
G. PRUVOT.....	Anatomie et physiologie comparées.
ABRAHAM	Physique.
CARTAN.....	Mécanique rationnelle.
Cl. GUICHARD	Géométrie supérieure.
LAPICQUE	Physiologie.
GENTIL	Géographie physique.
VESSIOT.....	Théorie des groupes et calcul des variations.
COTTON.....	Physique générale.
DRACH.....	Application de l'analyse à la géométrie.
C. FABRY.....	Physique.
Charles PÉREZ....	Zoologie.
LÉON BETRAND...	Géologie appliquée et géologie régionale.
DANGEARD.....	Botanique (Enseignement P. C. N.).
LESPIEAU	Théories chimiques.
LEDUC.....	Physique théorique et physique céleste.
MONTEL.....	Mathématiques générales.
MAURAIN.....	Physique du globe.
HÉROUARD.....	Zoologie.
Rémy PERRIER...	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
SAGNAC.....	Physique théorique et physique céleste.
RABAUD	Biologie expérimentale.
PORTIER	Physiologie.
BLAISE.....	Chimie organique.
PÉCHARD.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
AUGER.....	Chimie analytique.
M. GUICHARD.....	Chimie minérale.
GUILLET	Physique.

Secrétaire. DANIEL TOMBECK.

A

M. MARCEL BRILLOUIN

MEMBRE DE L'INSTITUT

A

M. CHARLES FABRY

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

DIRECTEUR GÉNÉRAL DE L'INSTITUT D'OPTIQUE

Témoignage
de respect et d'affection.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

PREMIÈRE THÈSE

THÉORIE

DES

SYSTÈMES OPTIQUES CENTRÉS

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER

Focales dans un dioptre de révolution et dans un système de dioptres de révolution autour d'un même axe.

Formes particulières, propres à l'élimination, que l'on peut assigner aux équations homographiques qui lient les focales.

Si, par une diaphragmation convenable, on isole un pinceau conique d'angle solide très petit issu d'un point objet, après un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, ce pinceau transformé présente, dans le milieu image, supposé isotrope ainsi que tous les milieux précédents, les propriétés suivantes :

1^o Il demeure très délié, sa section, par un plan normal à sa direction, a toujours une surface très petite.

2^o Il présente deux aires d'amincissement où le pinceau s'aplatit de manière à former deux petits morceaux de surface, appartenant à deux plans passant par le rayon moyen, et normaux l'un à l'autre.

Ces deux aires d'amincissement A_1 , A_2 , contiennent, sur le

rayon moyen, les centres de courbure principaux : C_1 , C_2 d'une surface d'onde quelconque du milieu image.

3^o Deux droites quelconques tracées dans ces aires d'amincissement et passant par C_1 ou C_2 sont telles que tous les rayons du pinceau s'appuient sur chacune d'elles; ce sont les *focales* du pinceau ou de son rayon moyen.

4^o La longueur $C_1 C_2$ définit (avec un signe convenable) l'*astigmatisme* du pinceau; si deux plans rectangulaires A_1 , A_2 déterminent dans le faisceau deux sections longitudinales dont les sommets C_1 , C_2 coïncident, la longueur $C_1 C_2$ est nulle et nous dirons que le pinceau très délié présente un astigmatisme nul; au point objet sommet du pinceau conique incident, correspond un point image sommet du pinceau conique émergent.

Chaque nouvelle réfraction donne naissance à deux focales nouvelles qui, en général, ne se peuvent déduire par une correspondance simple, des précédentes; le problème est très simplifié, si le plan d'incidence du rayon moyen du pinceau est, pour le système optique, un plan de symétrie dans lequel les lois de la réfraction maintiennent le rayon moyen.

C'est ce qui a lieu dans le cas particulier d'un système de dioptries de révolution autour d'un même axe, lorsque le pinceau est limité par une ouverture centrée sur l'axe; le rayon moyen du pinceau *diaphragmé* rencontre l'axe et détermine avec lui une section principale dans laquelle s'accomplissent toutes les réfractions successives; dans un système centré, ainsi diaphragmé, les focales seront déterminées de la manière suivante :

1^o FOCALES TRANSVERSES OU TANGENTIELLES. — Le pinceau conique incident présente, dans la section principale, deux rayons extrêmes faisant entre eux un très petit angle; les rayons auxquels ils donnent naissance à chaque nouvelle réfraction, se couperont, chaque fois, en un point qui déterminera, dans chacun des milieux successifs et dans le milieu-image, la focale perpendiculaire à la section principale, dite focale transverse ou tangentielle.

2^o FOCALES MÉRIDiennes OU SAGITTALES. — Pour déterminer l'autre focale, nous aurons à considérer deux rayons infiniment voisins, issus de P et se projetant tous deux suivant PI, sur le

plan de section principale pris pour plan de la figure; on peut regarder ces deux rayons comme *contenus* dans une surface conique (*fig. 1*) dont l'axe rencontre celui du système au point O, intersection des deux normales aux points d'incidence J, J₁ projetés en I; les deux rayons réfractés demeurant dans les faces du dièdre JOPJ₁ viendront couper OP en un point P', sommet du cône des rayons réfractés. Supposons que P étant fixe, l'angle au sommet JPJ₁ varie. Si le dioptré est sphérique, le point O est invariable et le point P' décrira un élément de la droite OP qui sera la focale sagittale. Si la méridienne du dioptré est quelconque, O se déplacera en même temps que I et le point P' décrira un élément linéaire du plan de la figure, la focale sagittale n'est plus dirigée suivant une droite passant par le point P. Enfin, si on suppose en P, non plus un point, mais une focale sagittale résultant d'une réfraction antérieure, il y aura à la fois changement des points P et I, (et même de O si le dioptré n'est pas sphérique); mais comme à chaque position de P correspond une seule position de P', celui-ci décrira un élément linéaire dans la section principale. Les deux aires d'amincissement sagittales, sur le pinceau incident et sur le rayon réfracté, se correspondront de la façon suivante: admettons que PI, P'I soient les rayons moyens et O le point où la normale en I rencontre l'axe, deux focales sagittales consécutives ont leurs milieux en ligne droite avec le point O.

RELATIONS ALGÈBRIQUES. — Les formules classiques du dioptré établissent entre l'abscisse d'une focale tangentielle et celle du point objet une relation qui peut se ramener à la forme homographique

$$(1) \quad Axx' + Bx + Cx' + D = 0,$$

x et x' étant comptées, sur le rayon incident et sur le rayon réfracté à partir d'origines absolument quelconques; les mêmes formules valent pour deux focales tangentielles consécutives, puisque les groupements de rayons employés ne présentent aucune différence.

Pour les focales sagittales, puisque les milieux de deux focales consécutives sont en ligne droite avec le point O, elles forment, sur les deux rayons conjugués, deux divisions homologues, et par suite, elles sont justiciables d'une relation ayant la forme (1).

Or, si l'on convient d'adopter sur chaque rayon une origine fixe, on aura dans l'un et l'autre cas, une suite d'équations de la forme (1) qui auront toujours en commun une même abscisse, dans deux équations successives; il sera donc théoriquement facile d'éliminer, une à une, toutes les abscisses intermédiaires, et d'obtenir finalement une relation entre l'abscisse du point objet et celle de la dernière focale; mais c'est une propriété fondamentale (facile à mettre en évidence), de la relation homographique, que l'élimination n'altère pas la *forme* de la relation; d'où la proposition suivante :

Sur le rayon moyen incident, et sur le rayon moyen émergent, le point objet et l'une des focales du milieu image forment deux divisions homographiques.

POINTS DE PETZVAL. — Or, on sait que deux divisions homographiques d'une autre sont homographiques entre elles; de telle sorte que, si on a choisi sur le rayon émergent une origine unique, les abscisses des deux focales sont liées par une relation de la forme

$$(1') \quad axy + bx + cy + d = 0$$

la division homographique présentera deux points doubles où les deux focales seront confondues, et que l'on obtiendra en faisant dans l'équation (1') $x = y$.

L'équation

$$ax^2 + (b + c)x + d = 0.$$

donnera les abscisses, réelles ou imaginaires, de ces deux points :

Si, sur la direction d'un rayon incident on fait déplacer un point objet, sommet d'un pinceau conique, il existe sur le rayon émergent deux points (réels, virtuels, ou imaginaires) où les deux focales seront confondues : nous appellerons points de Petzval, ces points, réels ou virtuels, qui peuvent être considérés comme des images de points objets.

Formes adoptées pour les relations homographiques.

L'élimination théoriquement très simple, qui conduit aux relations homographiques finales liant le point objet aux focales du milieu image, est, dans la pratique, extrêmement compliquée, ainsi que les formules résultantes; on peut cependant obtenir des élimi-

nations faciles par un choix approprié des origines et en donnant aux relations homographiques du dioptré une forme convenable.

FOCALES SAGITTALES. — Soient O_1I_1 le rayon incident moyen, O_2I_1 le rayon réfracté moyen, dont les inclinaisons (angles avec l'axe) sont respectivement u_1, u_2 , la normale au point I_1 rencontre l'axe au point N_1 , centre d'homologie des divisions formées par deux focales sagittales consécutives; ces deux focales S_1, S_2 étant en ligne droite avec N_1 , si on pose $\overline{O_1S_1} = s_1, \overline{O_2S_2} = s_2$, on aura sans difficulté (*fig. 2*):

$$\frac{\overline{N_1O_1} + s_1 \cos u_1}{s_1 \sin u_1} = \frac{\overline{N_1O_2} + s_2 \cos u_2}{s_2 \sin u_2}$$

$$\frac{\overline{N_1O_1}}{s_1 \sin u_1} - \frac{\overline{N_1O_2}}{s_2 \sin u_2} = \frac{\cos u_2}{\sin u_2} - \frac{\cos u_1}{\sin u_1}$$

mais si on désigne par i_1, i_2 les angles d'incidence et de réfraction,

$$\frac{\overline{N_1O_1}}{\sin i_1} = \frac{\overline{N_1I_1}}{\sin u_1}, \quad \frac{\overline{N_1O_2}}{\sin i_2} = \frac{\overline{N_1I_1}}{\sin u_2},$$

si on porte ces valeurs de $\overline{N_1O_1}, \overline{N_1O_2}$ dans la relation, on a

$$\frac{n_1 \sin i_1 \overline{N_1I_1}}{n_1 s_1 \sin^2 u_1} - \frac{n_2 \sin i_2 \overline{N_1I_1}}{n_2 s_2 \sin^2 u_2} = \frac{\cos u_2}{\sin u_2} - \frac{\cos u_1}{\sin u_1}.$$

Or, la loi de Descartes $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ permet de diviser les deux membres par $n_1 \sin i_1 \cdot \overline{N_1I_1}$ et on obtient la formule

$$(2) \quad \frac{1}{n_1 s_1 \sin^2 u_1} - \frac{1}{n_2 s_2 \sin^2 u_2} = \frac{1}{n_1 \sin i_1 \cdot \overline{N_1I_1}} \left(\frac{\cos u_2}{\sin u_2} - \frac{\cos u_1}{\sin u_1} \right)$$

qui ne contient au premier membre que les inclinaisons des rayons et les abscisses des focales par rapport aux origines O_1, O_2 . Le second membre peut recevoir diverses formes, par exemple en exprimant que le point I_1 est commun aux deux divisions

$$\frac{1}{n_1 s_1 \sin^2 u_1} - \frac{1}{n_2 s_2 \sin^2 u_2} = \frac{1}{n_1 \overline{O_1I_1} \sin^2 u_1} - \frac{1}{n_2 \overline{O_2I_1} \sin^2 u_2}$$

$$= - \frac{1}{\rho_1 \sin \omega_1} \left(\frac{1}{n_1 \sin u_1} - \frac{1}{n_2 \sin u_2} \right)$$

où $\overline{I_1N_1} = \rho_1$ et $\angle I_1N_1O_1 = \omega_1$.

FOCALES TANGENTIELLES. — La relation homographique qui lie deux focales tangentielles successives peut se mettre sous une forme analogue. Sur les rayons conjugués P_1I_1 , P_2I_1 contenus dans une section principale (*fig. 3*), choisissons deux focales tangentielles conjuguées P_1 , P_2 , comme origines fixes des distances; considérons deux autres focales tangentielles Q_1 , Q_2 que nous pourrions regarder comme mobiles; dans la même section principale, prenons, sur la surface du dioptré, le point J_1 infiniment voisin de I_1 ; les normales en I_1 , J_1 se coupent au centre de courbure Ω_1 ; joignons P_1J_1 , P_2J_1 , Q_1J_1 , Q_2J_1 ; soient $\hat{z}u_1$, $\hat{z}u_2$ les angles en P_1 et P_2 (qui n'ont provisoirement rien de commun avec les angles u_1 , u_2 du paragraphe précédent), $\hat{z}x_1$, $\hat{z}x_2$ les angles en Q_1 , Q_2 ; soit, i_1 l'angle $P_1J_1\Omega_1$, et $i_1 + \hat{z}i_1$ l'angle $Q_1J_1\Omega_1$, i_2 l'angle $P_2J_1\Omega_2$ et $i_2 + \hat{z}i_2$ l'angle $Q_2J_1\Omega_2$, et enfin $\hat{z}\omega = I_1\Omega_1J_1$.

Exprimons I_1J_1 de diverses manières :

$$I_1J_1 = \frac{\overline{P_1I_1}\hat{z}u_1}{\cos i_1} = \frac{\overline{Q_1I_1}\hat{z}x_1}{\cos i_1} = \frac{\overline{P_2I_1}\hat{z}u_2}{\cos i_2} = \frac{\overline{Q_2I_1}\hat{z}x_2}{\cos i_2} = \overline{Q_1I_1}\hat{z}\omega_1.$$

La loi de Descartes nous donne :

$$(3) \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad \text{et} \quad (3') \quad n_1 \cos i_1 \hat{z}i_1 = n_2 \cos i_2 \hat{z}i_2$$

Exprimons $\hat{z}x_1$, $\hat{z}x_2$ au moyen des relations évidentes

$$\begin{aligned} \hat{z}x_1 &= \hat{z}u_1 + \hat{z}i_1 & \hat{z}x_2 &= \hat{z}u_2 + \hat{z}i_2 \\ \overline{P_1I_1}\hat{z}u_1 &= \overline{Q_1I_1}(\hat{z}u_1 + \hat{z}i_1) & \overline{P_2I_1}\hat{z}u_2 &= \overline{Q_2I_1}(\hat{z}u_2 + \hat{z}i_2) \end{aligned}$$

ou en posant $\overline{P_1I_1} - \overline{Q_1I_1} = \overline{P_1Q_1} = l_1$ $\overline{P_2I_1} - \overline{Q_2I_1} = \overline{P_2Q_2} = l_2$

$$l_1 \hat{z}u_1 = \overline{Q_1I_1} \hat{z}i_1 \quad \quad l_2 \hat{z}u_2 = \overline{Q_2I_1} \hat{z}i_2$$

mais $\frac{\overline{P_1I_1}\hat{z}u_1}{\cos i_1} = \frac{\overline{P_2I_1}\hat{z}u_2}{\cos i_2}$ donne en multipliant par (3')

$$n_1 \overline{P_1I_1} \hat{z}u_1 \hat{z}i_1 = n_2 \overline{P_2I_1} \hat{z}u_2 \hat{z}i_2$$

ou, en éliminant $\hat{z}i_1$, $\hat{z}i_2$,

$$\frac{n_1 \overline{P_1I_1} \hat{z}u_1^2 l_1}{\overline{Q_1I_1}} = \frac{n_2 \overline{P_2I_1} \hat{z}u_2^2 l_2}{\overline{Q_2I_1}}$$

inversant les rapports :

$$\frac{\overline{P_1 I_1} - t_1}{n_1 \overline{P_1 I_1} \delta u_1^2} = \frac{\overline{P_2 I_1} - t_2}{n_2 \overline{P_2 I_1} \delta u_2^2},$$

et enfin

$$(4) \quad \frac{1}{n_1 t_1 \delta u_1^2} - \frac{1}{n_2 t_2 \delta u_2^2} = \frac{1}{n_1 \overline{P_1 I_1} \delta u_1^2} - \frac{1}{n_2 \overline{P_2 I_1} \delta u_2^2}.$$

Nous allons établir par une autre voie cette relation afin de montrer qu'elle n'est pas autre chose qu'une traduction du principe de Fermat pris sous la forme du corollaire suivant :

Entre un point de l'espace-objet et une focale tangentielle de l'espace-image, deux chemins différents correspondent nécessairement à des chemins optiques égaux, s'ils obéissent à la loi de Descartes.

Appliquons cette proposition : 1^o aux points P_1 , P_2 ; 2^o aux points Q_1 , Q_2 :

$$\begin{aligned} n_1 \overline{P_1 I_1} - n_2 \overline{P_2 I_1} &= n_1 \overline{P_1 J_1} - n_2 \overline{P_2 J_1} \\ n_1 \overline{Q_1 I_1} - n_2 \overline{Q_2 I_1} &= n_1 \overline{Q_1 J_1} - n_2 \overline{Q_2 J_1} \end{aligned}$$

ou, en groupant convenablement les termes,

$$\begin{aligned} n_1 [(\overline{P_1 J_1} - \overline{Q_1 J_1}) - (\overline{P_1 I_1} - \overline{Q_1 I_1})] \\ = n_2 [(\overline{P_2 J_1} - \overline{Q_2 J_1}) - (\overline{P_2 I_1} - \overline{Q_2 I_1})] \end{aligned}$$

ou

$$(5) \quad n_1 [\overline{P_1 J_1} - \overline{Q_1 J_1} - \overline{P_1 Q_1}] = n_2 [\overline{P_2 J_1} - \overline{Q_2 J_1} - \overline{P_2 Q_2}]$$

Or, dans le triangle $P_1 Q_1 J_1$, on a en ne conservant que les termes du second ordre,

$$\begin{aligned} \overline{Q_1 J_1}^2 &= \overline{P_1 J_1}^2 + \overline{P_1 Q_1}^2 - 2 \overline{P_1 J_1} \times \overline{P_1 Q_1} \left(1 - \frac{\delta u_1^2}{2}\right) \\ [\overline{P_1 J_1} - \overline{P_1 Q_1}]^2 - \overline{Q_1 J_1}^2 &= - \overline{P_1 J_1} \times \overline{P_1 Q_1} \times \delta u_1^2 \\ \overline{P_1 J_1} - \overline{P_1 Q_1} - \overline{Q_1 J_1} &= - \frac{\overline{P_1 J_1} \times \overline{P_1 Q_1} \times \delta u_1^2}{\overline{P_1 J_1} + \overline{P_1 Q_1} + \overline{Q_1 J_1}}, \end{aligned}$$

et puisque l'on a négligé les termes d'un ordre plus élevé que le second,

$$\overline{P_1 J_1} - \overline{Q_1 J_1} - \overline{P_1 Q_1} = - \frac{\overline{P_1 I_1} \times \overline{P_1 Q_1} \times \hat{z} u_1^2}{2 (\overline{P_1 I_1} - \overline{P_1 Q_1})},$$

de même

$$\overline{P_2 J_1} - \overline{Q_2 J_1} - \overline{P_2 Q_2} = - \frac{\overline{P_2 I_1} \times \overline{P_2 Q_2} \times \hat{z} u_2^2}{2 (\overline{P_2 I_1} - \overline{P_2 Q_2})}$$

mais $\overline{P_1 Q_1} = t_1$, $\overline{P_2 Q_2} = t_2$; on a en remplaçant dans l'équation (5) et en inversant les rapports

$$\frac{1}{n_1 t_1 \hat{z} u_1^2} - \frac{1}{n_2 t_2 \hat{z} u_2^2} = - \frac{1}{n_1 \overline{P_1 I_1} \hat{z} u_1^2} - \frac{1}{n_2 \overline{P_2 I_1} \hat{z} u_2^2}$$

ou encore, puisque $\overline{P_1 I_1} \hat{z} u_1 = \overline{\Omega_1 I_1} \hat{z} \omega_1 \cos i_1$, $\overline{P_2 I_1} \hat{z} u_2 = \overline{\Omega_1 I_1} \hat{z} \omega_1 \cos i_2$ et en posant $I_1 \Omega_1 = + R_1$,

$$(4') \quad \frac{1}{n_1 t_1 \hat{z} u_1^2} - \frac{1}{n_2 t_2 \hat{z} u_2^2} = - \frac{1}{R_1 \hat{z} \omega_1} \left(\frac{1}{n_1 \hat{z} u_1 \cos i_1} - \frac{1}{n_2 \hat{z} u_2 \cos i_2} \right)$$

Sur les conditions d'application du principe de Fermat aux focales tangentielles.

L'application du principe de Fermat à deux focales tangentielles successives nous a permis, grâce aux termes du 2^e ordre, de retrouver l'équation qui lie ces focales sous la forme (4); nous pouvons justifier l'emploi des termes du second ordre; calculons la différence des deux chemins optiques ($P_1 P_2$),

$$\begin{aligned} \Delta &= n_1 \overline{P_1 J_1} - n_2 \overline{P_2 J_1} - (n_1 \overline{P_1 I_1} - n_2 \overline{P_2 I_1}) \\ &= n_1 (\overline{P_1 J_1} - \overline{P_1 I_1}) - n_2 (\overline{P_2 J_1} - \overline{P_2 I_1}). \end{aligned}$$

Or,

$$\overline{P_1 J_1}^2 = \overline{P_1 I_1}^2 - 2 \overline{P_1 I_1} \times \overline{I_1 J_1} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{z} \omega_1}{2} - i_1 \right) + \overline{I_1 J_1}^2,$$

en posant

$$\overline{P_1 I_1} = q_1, \quad \overline{I_1 J_1} = a = 2 R \sin \frac{\hat{z} \omega_1}{2}, \quad (\text{ici } R = \overline{\Omega_1 I_1})$$

$$\overline{P_1 J_1}^2 = q_1^2 \left(1 - \frac{2a}{q_1} \sin i_1 \cos \frac{\hat{z} \omega_1}{2} - \frac{2a}{q_1} \cos i_1 \sin \frac{\hat{z} \omega_1}{2} + \frac{a^2}{q_1^2} \right),$$

ou en conservant les quantités du deuxième ordre et extrayant la racine carrée avec la même approximation :

$$\overline{P_1 J_1} = q_1 \left(1 - \frac{a \sin i_1}{q_1} + \frac{a^2 \cos^2 i_1}{2 q_1^2} - \frac{a^2 \cos i_1}{2 q_1 R} \right)$$

$$\overline{P_1 J_1} - q_1 = - a \sin i_1 + \frac{a^2 \cos i_1}{2} \left(\frac{\cos i_1}{q_1} - \frac{1}{R} \right);$$

une expression analogue pour $P_2 J_1 - q_2$ nous permet d'écrire :

$$\Delta = a (-n_1 \sin i_1 + n_2 \sin i_2)$$

$$+ \frac{a^2}{2} \left[n_1 \cos i_1 \left(\frac{\cos i_1}{q_1} - \frac{1}{R} \right) - n_2 \cos i_2 \left(\frac{\cos i_2}{q_2} - \frac{1}{R} \right) \right].$$

Il est aisé de voir que le premier terme est nul en vertu de la loi de Descartes, le deuxième est également nul, puisque, égalé à 0, il n'est autre chose que la relation qui lie les abscisses des focales tangentielles; Δ est donc une quantité du troisième ordre; il est visible que la proposition s'étend à la différence de chemin optique entre une focale tangentielle de l'espace objet et la focale tangentielle conjuguée de l'espace image dans un système centré, car le chemin optique total est la somme algébrique des chemins optiques successifs d'une focale à la suivante : *La variation du chemin optique entre deux focales tangentielles est nulle aux quantités du troisième ordre près.*

Eliminations.

Considérons maintenant une succession de dioptries formés par les milieux d'indice $n_1, n_2 \dots n_{p+1}$; si le rayon incident coupe l'axe au point O_1 , les conjugués successifs le rencontreront aux points $O_2, O_3 \dots O_{p+1}$ faisant avec l'axe les angles $u_2, u_3 \dots u_{p+1}$; aux points d'incidence successifs, les normales auront jusqu'à l'axe les longueurs $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_p$ et les rayons de courbure seront $R_1, R_2 \dots R_p$.

Si, sur le rayon incident, nous prenons un point S_1 d'abscisse s_1 par rapport au point O_1 , les focales sagittales successives présen-

teront à partir des origines $O_2 \dots O_{p+1}$ les abscisses $s_2 \dots s_{p+1}$ et on aura les équations

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_1 s_1 \sin^2 u_1} - \frac{1}{n_2 s_2 \sin^2 u_2} &= - \frac{1}{\rho_1 \sin \omega_1} \left(\frac{1}{n_1 \sin u_1} - \frac{1}{n_2 \sin u_2} \right) \\ \frac{1}{n_2 s_2 \sin^2 u_2} - \frac{1}{n_3 s_3 \sin^2 u_3} &= - \frac{1}{\rho_2 \sin \omega_2} \left(\frac{1}{n_2 \sin u_2} - \frac{1}{n_3 \sin u_3} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{n_p s_p \sin^2 u_p} - \frac{1}{n_{p+1} s_{p+1} \sin^2 u_{p+1}} &= - \frac{1}{\rho_p \sin \omega_p} \left(\frac{1}{n_p \sin u_p} - \frac{1}{n_{p+1} \sin u_{p+1}} \right) \end{aligned}$$

une simple addition élimine toutes les abscisses intermédiaires et l'on obtient

$$(6) \quad \frac{1}{n_1 s_1 \sin^2 u_1} - \frac{1}{n_{p+1} s_{p+1} \sin^2 u_{p+1}} = \sum_1^p \frac{1}{\rho_q \sin \omega_q} \left(\frac{1}{n_q \sin u_q} - \frac{1}{n_{q+1} \sin u_{q+1}} \right) = \mathcal{F}.$$

Si nous revenons au point O_1 , il lui correspondra sur les conjugués successifs du rayon incident des focales tangentielles $\Theta_2 \Theta_3 \dots \Theta_{p+1}$ qui seront en général à une petite distance de l'axe; ce sont ces focales qui, jouant le rôle des points $O_2, O_3 \dots$ seront les origines des abscisses $t_2 \dots t_{p+1}$ des focales tangentielles successives du point S_1 ; par rapport à ces nouvelles origines nous aurons une série d'équations dans lesquelles les $\hat{z}u_1 \dots \hat{z}u_{p+1}$ seront bien les accroissements des angles qui figurent dans les expressions relatives aux focales sagittales, et en posant $s_1 = t_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_1 t_1 \hat{z}u_1^2} - \frac{1}{n_2 t_2 \hat{z}u_2^2} &= - \frac{1}{R_1 \hat{z}\omega_1} \left(\frac{1}{n_1 \hat{z}u_1 \cos i_1} - \frac{1}{n_2 \hat{z}u_2 \cos i_2} \right) \\ \frac{1}{n_2 t_2 \hat{z}u_2^2} - \frac{1}{n_3 t_3 \hat{z}u_3^2} &= - \frac{1}{R_2 \hat{z}\omega_2} \left(\frac{1}{n_2 \hat{z}u_2 \cos i_2} - \frac{1}{n_3 \hat{z}u_3 \cos i_3} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{n_p t_p \hat{z}u_p^2} - \frac{1}{n_{p+1} t_{p+1} \hat{z}u_{p+1}^2} &= - \frac{1}{R_p \hat{z}\omega_p} \left(\frac{1}{n_p \hat{z}u_p \cos i_p} - \frac{1}{n_{p+1} \hat{z}u_{p+1} \cos i_{p+1}} \right) \end{aligned}$$

et ici encore par simple addition

$$(7) \quad \frac{1}{n_1 l_1 \hat{z} u_1^2} - \frac{1}{n_{p+1} l_{p+1} \hat{z} u_{p+1}^2} \\ = \sum_1^p - \frac{1}{R_q \hat{z} \omega_q} \left(\frac{1}{n_q \hat{z} u_q \cos i_q} - \frac{1}{n_{p+1} \hat{z} u_{q+1} \cos i_{q+1}} \right) = \mathfrak{C}.$$

Si nous multiplions les deux membres de l'équation (6) par $\sin u_1 \sin u_{p+1}$, et par $\hat{z} u_1 \hat{z} u_{p+1}$ les deux membres de l'équation (7) on obtient

$$\frac{\sin u_{p+1}}{n_1 s_1 \sin u_1} - \frac{\sin u_1}{n_{p+1} s_{p+1} \sin u_{p+1}} = \mathcal{G} \sin u_1 \sin u_{p+1} = \frac{1}{k_s} \\ \frac{\hat{z} u_{p+1}}{n_1 l_1 \hat{z} u_1} - \frac{\hat{z} u_1}{n_{p+1} l_{p+1} \hat{z} u_{p+1}} = \mathfrak{C} \hat{z} u_1 \hat{z} u_{p+1} = \frac{1}{k_i}$$

les quantités $\frac{1}{k_s}$ et $\frac{1}{k_i}$ seront construites d'une façon tout à fait semblable, vis-à-vis des rapports des sinus dans $\frac{1}{k_s}$, et des rapports des accroissements dans $\frac{1}{k_i}$; ce seront des quantités comparables.

Si, avec un changement de notation évident, on supprime la trace du nombre de réfractions, on aura les deux équations (8) et (9)

$$(8) \quad \frac{\sin u'}{ns \sin u} - \frac{\sin u}{n's' \sin u'} = \frac{1}{k_s}$$

$$(9) \quad \frac{\hat{z} u'}{nt \hat{z} u} - \frac{\hat{z} u}{n'l' \hat{z} u'} = \frac{1}{k_i}$$

dans ces équations, s et t sont, en général, comptés à partir de la même origine, et présentent la même valeur.

On rend les formules plus symétriques et plus générales, en considérant deux origines distinctes, l'une O sur l'axe, l'autre Θ près de l'axe, sur le rayon incident; la première pour les focales sagittales, la deuxième pour les focales tangentielles; s' et t' sont alors comptés à partir de deux origines O' et Θ' , la première, sur l'axe, est la focale sagittale conjuguée de O , la deuxième, sur le rayon émergent, hors de l'axe en général, coïncide avec la focale tangentielle conjuguée de Θ .

Nous allons présenter une première application de ces formules, en les employant à établir la théorie des systèmes centrés, dans les conditions qui constituent une première approximation, appelée habituellement : approximation de Gauss.

Bien que la première approximation soit une théorie classique, on me permettra de l'exposer ici, d'abord pour montrer qu'on peut substituer une théorie purement algébrique très simple (car elle n'exige même pas, dans une exposition élémentaire, l'établissement de l'équation des focales tangentielles), aux exposés géométriques et à leurs approximations difficilement justifiables.

De plus, nous devons établir un certain nombre de formules qui ne sont pas classiques, et dont nous aurons à faire un usage constant ; enfin, la plupart des calculs seront utilisables pour le chapitre suivant.

CHAPITRE II

Théorie des systèmes optiques centrés. Approximation de Gauss.

Les inclinaisons étant quelconques, nous avons écrit les équations des focales

$$(8) \quad \frac{\sin u'}{ns \sin u} - \frac{\sin u}{n's' \sin u'} = \frac{1}{k_s}$$

$$(9) \quad \frac{\partial u'}{n l \partial u} - \frac{\partial u}{n' l' \partial u'} = \frac{1}{k_t}$$

Supposons que le faisceau diaphragmé ait un rayon moyen assez peu incliné sur l'axe, pour que toutes les inclinaisons puissent être regardées comme des infiniment petits du premier ordre, $\frac{\partial u'}{\partial u}, \frac{\sin u'}{\sin u}$, présentent une même valeur limite γ qu'on appelle le rapport de convergence des deux rayons conjugués.

Les seconds membres prennent une même valeur limite car :

1° La longueur de la normale entre le point d'incidence et l'axe, et le rayon de courbure tendent tous les deux vers le rayon de courbure au sommet; 2° les cosinus qui figurent dans $\frac{1}{k_t}$ tendent vers l'unité; 3° les termes de $\frac{1}{k_s}$ et $\frac{1}{k_t}$ sont dès lors formés de rapports de sinus et de rapports d'accroissements qui ont une même valeur limite; si $\frac{1}{k}$ est la limite commune, on a

$$\frac{\gamma}{ns} - \frac{1}{\gamma n' s'} = \frac{1}{k} \quad \frac{\gamma}{nt} - \frac{1}{\gamma n' t'} = \frac{1}{k}$$

si $s = t, s' = t'$

Or, imaginons, pour les s (et les t), l'origine fixe O sur l'axe du système; quand nous ferons tourner le rayon incident autour du point O , l'intersection du rayon émergent avec l'axe se déplacera, et atteindra une position limite O' , lorsque le rayon incident sera sensiblement confondu avec l'axe; ce point O' est par convention l'origine des s' ; c'est aussi l'origine des t' , car la focale tangentielle du milieu image est donnée par l'intersection de l'axe (qui est son propre conjugué), avec le rayon émergent, conjugué de l'incident qui passe par O .

CONSÉQUENCES. — 1° Si on considère un pinceau délié ayant pour sommet le point O , et dont le rayon moyen s'écarte infiniment peu de l'axe, il sera transformé en un autre pinceau ayant pour sommet le point O' ; ces deux points conjugués *quasi-stigmatiques* seront appelés conjugués de Gauss.

2° Si, sur les droites du pinceau de sommet O , on considère des points objets formant un élément de surface normal à l'axe, sur les droites conjuguées du pinceau de sommet O' , les focales seront confondues, et on aura des points images conjugués (*quasi-stigmatiques*) qui formeront un élément de surface normal à l'axe par raison de symétrie.

Dans un exposé élémentaire de la théorie des systèmes centrés, on peut regarder ces résultats comme établis de proche en proche par la théorie du dioptré, et ne tenir compte que de l'équation des focales sagittales.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES. — De ce qui précède, il résulte que si O, O' sont les points conjugués sur l'axe, pris pour origines, et dont le rapport de convergence est γ , les abscisses x, x' de deux autres points conjugués quelconques sont liées par la relation homographique

$$(10) \quad \frac{\gamma}{nx} - \frac{1}{\gamma n'x'} = \frac{1}{k}.$$

Nous allons rencontrer deux catégories de propriétés du système :

1° Celles qui dépendent de la forme homographique générale

$$(1) \quad Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \quad (A \text{ différent de } 0).$$

Ce sont : (a) l'existence des foyers, conjugués des points à l'infini

$$\begin{array}{ll} x' \infty & X' = -\frac{C}{A} \quad \text{foyer-objet.} \\ x \infty & X = -\frac{B}{A} \quad \text{foyer-image.} \end{array}$$

(b) l'existence des points de Bravais (points doubles de la division homographique), où le point objet et le point image sont confondus ; les origines de x et x' étant supposées confondues, les points de Bravais sont donnés par

$$A x^2 + (B + C) x + D = 0$$

dont les racines x' et x'' sont telles que

$$\frac{x' + x''}{2} = -\frac{B + C}{2A} = \frac{X + X'}{2}.$$

Ces points, au nombre de deux, réels ou imaginaires, sont tels, que le milieu de la distance qui les sépare coïncide avec le milieu de la distance des foyers.

Il est facile de constater que si on prend comme origine : 1° des abscisses π des points objet, le foyer objet, 2° des π' , abscisses des points image, le foyer image, (1) prend la forme dite de Newton

$$\pi\pi' = C^{\text{te}}.$$

2° Propriétés dépendant de la forme particulière (10). On a ici pour le foyer objet, $\overline{OF} = \frac{k\gamma}{n}$ et pour le foyer image, $\overline{O'F'} = -\frac{k}{n'\gamma}$; il en résulte que la constante k est indépendante de γ , c'est-à-dire du choix des origines, car la relation de Newton nous donne, O et O' étant conjugués : Constante = $\overline{FO} \times \overline{F'O'} = -\frac{k^2}{nn'}$

k est donc caractéristique du système.

De même que nous avons supposé A différent de 0, supposons $\frac{1}{k}$ différent de 0.

I. Systèmes à foyers.

OF, O'F' ont les valeurs finies

$$(11) \quad OF = \frac{k\gamma}{n} \quad O'F' = -\frac{k}{n'\gamma}.$$

GROSSISSEMENT LATÉRAL OU GRANDISSEMENT. — Prenons l'équation sous la forme

$$\frac{\sin u'}{ns \sin u} - \frac{\sin u}{n's' \sin u'} = \frac{1}{k}.$$

$y = s \sin u$ $y' = s' \sin u'$ représentent deux éléments de droites perpendiculaires à l'axe situées dans deux éléments de surface conjugués (*fig. 4*):

$$\frac{y'}{y} = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} + \frac{n's'}{k}.$$

Si nous faisons tendre vers O, s et s' , sans modifier les angles u et u' , y' : y tend vers une limite β , qu'on appelle le grossissement latéral ou grandissement aux points O, O', et puisque $\frac{\sin u'}{\sin u} = \gamma$

$$\beta = \frac{n}{n'\gamma} \quad \text{et} \quad \beta\gamma = \frac{n}{n'}.$$

EXPRESSION DES ABCISSES EN FONCTION DES RAPPORTS DE CONVERGENCE. — Dans l'équation (10) les origines sont deux points conjugués quelconques; nous pouvons choisir comme origines nouvelles les deux points d'abscisse x et x' , où le rapport de convergence sera γ_1 , on aura donc en écrivant que O et O' sont conjugués

$$\frac{\gamma_1}{-nx} - \frac{1}{n'x'\gamma_1} = \frac{1}{k} \quad \frac{\gamma}{nx} - \frac{1}{n'x'\gamma} = \frac{1}{k}.$$

On tire aisément :

$$(12) \quad x = \frac{k}{n} \left(\gamma - \gamma_1 \right) \quad x' = \frac{k}{n'} \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma} \right) = \frac{k}{n'} \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma\gamma_1}$$

si on revient aux origines fixes O, O' et si on considère les points aux distances x et x' comme variables, on voit que ces points conju-

gués seront déterminés par la valeur de γ_1 , et on pourra, avec un sens bien net, désigner un couple conjugué par la valeur correspondante du rapport de convergence.

Les relations (12) nous donnent (12') $\frac{nx}{n'x'} = \gamma\gamma_1$.

POINTS INVERSES. — Nous donnerons ce nom à des points dont les rapports de convergence ont des valeurs inverses; en ces points

$$\gamma\gamma_1 = 1 \quad \text{et} \quad (13) \quad nx = n'x' = k \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right).$$

GROSSISSEMENT LONGITUDINAL. — Supposons que le point γ_1 soit infiniment voisin du point γ . $\gamma_1 = \gamma + d\gamma$

$$ndx = -kd\gamma \quad n'dx' = -\frac{kd\gamma}{\gamma^2}$$

le rapport $\frac{dx'}{dx}$ sera dit le grossissement longitudinal α

$$(14) \quad \alpha = \frac{n}{n'} \frac{1}{\gamma^2} = \frac{n'}{n} \beta^2.$$

POINTS DITS CARDINAUX. — Les points importants d'un système centré, autres que les foyers et les points de Bravais, correspondent aux valeurs remarquables des divers grossissements.

1^o *Points et plans principaux.* — P.P'.

$$\beta = 1 \quad \gamma = \frac{n}{n'} \quad \alpha = \frac{n'}{n}$$

les distances des foyers à ces plans sont données par les formules

$$(11) \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{n}{n'} \quad \overline{PF} = \frac{k}{n'} = f \quad \overline{P'F'} = -\frac{k}{n} = f';$$

par analogie avec le dioptré où P et P' sont confondus au sommet, ces longueurs sont dites longueurs focales, f objet, f' image.

Dans les plans principaux, deux points conjugués sont situés à une même petite distance de l'axe, ce qui justifie la construction géométrique habituelle.

2° *Points et plans anti-principaux* (ou principaux négatifs) A, A'.

$$\beta = -1 \quad \gamma = -\frac{n}{n'} \quad \alpha = \frac{n'}{n}$$

$$\overline{AF} = -\frac{k}{n'} = -f \quad \overline{A'F'} = +\frac{k}{n} = -f'$$

ils sont symétriques des points principaux par rapport aux foyers.

3° *Points nodaux* N, N'

$$\gamma = 1 \quad \beta = \frac{n}{n'} \quad \alpha = \frac{n'}{n'}$$

$$\overline{NF} = \frac{k}{n} = -f' \quad \overline{N'F'} = -\frac{k}{n'} = -f$$

Les rayons conjugués de faible inclinaison qui rencontrent l'axe aux points nodaux sont parallèles.

4° *Points anti-nodaux* (ou nodaux négatifs) B, B'

$$\gamma = -1 \quad \beta = -\frac{n}{n'} \quad \alpha = \frac{n}{n'}$$

$$\overline{BF} = -\frac{k}{n} = f' = -\overline{NF} \quad \overline{B'F'} = \frac{k}{n'} = f = -\overline{N'F'}.$$

5° On pourrait considérer des points qui n'ont pas reçu de noms particuliers et correspondant à $\alpha = 1$

$$\alpha = 1 \quad \gamma = \pm \sqrt{\frac{n}{n'}} \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{n'}{n}}$$

si on désigne par Q, Q' les points qui correspondent au signe +, Q₁, Q'₁ ceux qui correspondent au signe —

$$QF = \frac{k}{\sqrt{nn'}} = \sqrt{-ff'} = \frac{1}{C} \quad \overline{Q'F'} = -\frac{k}{\sqrt{nn'}} = -\frac{1}{C}$$

$$\overline{Q_1F} = -\frac{k}{\sqrt{nn'}} = -\frac{1}{C} \quad \overline{Q'_1F'} = \frac{k}{\sqrt{nn'}} = \frac{1}{C}.$$

$C = \frac{1}{\sqrt{-ff'}}$ pourrait représenter la valeur absolue de la convergence du système; nous serons cependant amenés à définir la convergence, $C = \frac{nn'}{k}$.

Il est à peine besoin de faire remarquer les simplifications qu'entraîne l'égalité des indices extrêmes.

II. Systèmes sans foyers ou afocaux.

$\frac{1}{k} = 0$: OF, OF' deviennent infinis; les foyers sont rejetés à l'infini, l'équation (10) devient

$$\frac{\gamma}{nx} - \frac{1}{\gamma n'x'} = 0$$

la permutation des points et des origines donne

$$\frac{\gamma_1}{-nx} - \frac{1}{-\gamma_1 n'x'} = 0 \quad \frac{nx}{n'x'} = \gamma^2 = \gamma_1^2.$$

1° Dans un système sans foyers, le rapport de convergence est constant ainsi que les divers grossissements.

2° Il n'y a ni points nodaux (positifs ou négatifs), ni plans principaux (+ ou —), à moins que tous les points ne jouissent de l'une de ces propriétés, (ce qui aura lieu si γ présente l'une des valeurs $\pm 1, \pm \frac{n}{n'}$).

3° La formule générale montre que l'un des points de Bravais est rejeté à l'infini; si $D = OO'$, le plan de Bravais unique a pour abscisses : X par rapport à O, $X - D$ par rapport à O'

$$\frac{nX}{n'(X - D)} = \gamma^2 \quad X = - \frac{n'D\gamma^2}{n - n'\gamma^2}$$

le deuxième plan de Bravais est aussi rejeté à l'infini si $\gamma = \pm \sqrt{\frac{n}{n'}}$ c'est-à-dire $\alpha = 1$.

Convergence.

On définit la convergence d'un système, dont l'air constitue les milieux extrêmes, comme l'inverse de la longueur focale objet

$$C = \frac{1}{f}.$$

On peut donner à cette notion une forme plus générale en posant : $C = \frac{nn'}{k}$ égale, par suite, à $\frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'}$; n, n' indices des milieux extrêmes.

Cette forme redonne $\frac{1}{f}$ pour une lentille.

Si le sens positif est celui de la propagation de la lumière, les systèmes dits convergents auront une convergence négative, les systèmes divergents, une convergence positive.

Combinaisons de systèmes.

I. La forme générale (10) permet d'exprimer au moyen du rapport de convergence d'un système résultant de deux autres, les rapports de convergence partiels de ces deux systèmes S et S'.

Soit un point O_0 dans le milieu qui demeure le milieu objet, O son conjugué dans le premier système, et O'_0 le conjugué de O par rapport au second système (qui est évidemment tel que son milieu objet se confond avec le milieu image du premier); soit γ le rapport de convergence de O_0, O ; γ' celui de O, O'_0 ; prenons trois autres points définis comme O_0, O, O'_0 , et ayant pour abscisses respectives : x_0, x, x'_0 , par rapport aux origines O_0, O, O'_0 , on aura

$$\frac{\gamma}{n_0 x_0} - \frac{1}{\gamma n x} = \frac{1}{k} \quad \frac{\gamma'}{n x} - \frac{1}{\gamma' n_0 x'_0} = \frac{1}{k'}$$

n'_0 étant l'indice du milieu image du système total et $\frac{1}{k'}$ la constante du second système; éliminons x

$$\frac{\gamma \gamma'}{n_0 x_0} - \frac{1}{\gamma \gamma' n'_0 x'_0} = \frac{\gamma'}{k} + \frac{1}{k' \gamma}.$$

Or, si nous désignons par Γ le rapport de convergence de O, O'_0 , dans le système total, et $\frac{1}{K}$ la constante de ce système, on a évidemment $\Gamma = \gamma \gamma'$, d'ailleurs les points conjugués par rapport au système total sont liés par la relation

$$\frac{\Gamma}{n_0 x_0} - \frac{1}{\Gamma n'_0 x'_0} = \frac{1}{K}$$

il en résulte

$$(15) \quad \frac{1}{K} = \frac{\gamma'}{k} + \frac{1}{k'\gamma}$$

ou en introduisant Γ

$$\gamma = \Gamma \frac{K}{k} + \frac{K}{k'} \quad \frac{1}{\gamma'} = \frac{K}{k} + \frac{K}{k'\Gamma}.$$

1° En un point quelconque du milieu objet le rapport de convergence du premier système est fonction linéaire du rapport de convergence du système total.

2° En un point quelconque du milieu image, l'inverse du rapport de convergence du second système est fonction linéaire de l'inverse du rapport de convergence du système total.

Si on désigne par u_0, u, u'_0 les angles avec l'axe des rayons successivement conjugués qui passent par O_0, O, O'_0 , la relation (15) prend la forme plus symétrique

$$(15') \quad \frac{u}{K} = \frac{u'_0}{k} + \frac{u_0}{k'}.$$

II. On peut établir une autre formule importante en introduisant la distance e d'un point image Q du premier système, où le rapport de convergence est Γ , à un point objet P' du deuxième système, où le rapport de convergence est Γ' .

Soient π et π' les points principaux du système résultant, et Σ le point du milieu commun qui, image de π dans S (rapport de convergence partiel γ), est objet de π' dans S' (rapport de convergence $\frac{1}{\gamma} \frac{n_0}{n'_0}$), on a par l'application des formules (12)

$$\begin{aligned} n\overline{Q\Sigma} &= k \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\Gamma} \right) & n\overline{\Sigma P'} &= k' \left(\frac{1}{\gamma} \frac{n_0}{n'_0} - \Gamma' \right) \\ n\overline{QP'} &= ne = \frac{1}{\gamma} \left(k + k' \frac{n_0}{n'_0} \right) - \frac{k}{\Gamma} - k'\Gamma' \end{aligned}$$

mais d'après la formule (15)

$$(16) \quad \gamma = \frac{K}{k} \frac{n_0}{n'_0} + \frac{K}{k'} \quad ne = \frac{kk'}{K} - \frac{k}{\Gamma} - k'\Gamma'$$

$$\frac{1}{K} = \frac{\Gamma'}{k} + \frac{1}{k'\Gamma} + \frac{ne}{kk'}$$

ou en introduisant les convergences c, c', C ,

$$\begin{aligned} \frac{nn_0n'_0}{K} &= \frac{n_0n\Gamma'n'_0}{k} + \frac{n'_0nn_0}{k'\Gamma} + \frac{n_0n'_0n^2}{kk'} e \\ (17) \quad nC &= cn_0\Gamma' + \frac{c'n_0}{\Gamma} + e.cc' \end{aligned}$$

ces formules deviennent particulièrement simples dans deux cas particuliers

1° Les points envisagés (Γ, Γ') sont des points nodaux $\Gamma = \Gamma' = 1$

$$(17'') \quad \frac{1}{K} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} + \frac{ne}{kk'}$$

2° (Γ et Γ') sont des points principaux $\Gamma = \frac{n_0}{n} \quad \Gamma' = \frac{n}{n'_0}$

$$(17') \quad C = c + c' + \frac{e}{n} cc' \quad \frac{1}{nK} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} + \frac{e}{kk'}$$

Ces dernières s'appliquent à une lentille dont l'épaisseur est e .

Formules générales de la convergence et des distances frontales.

Soient p surfaces dirimantes $S_1, S_2 \dots S_p$, rencontrant leur axe de révolution commun en $A_1, A_2, \dots A_p$ et séparant des milieux d'indices $n_0, n_1, \dots n_p, \dots$, nous poserons $A_i A_{i+1} = e_i$ et $\tau_i = \frac{n_i}{e_i}$.

$c_i = \frac{n_{i-1}n_i}{k_i}$ est la convergence du dioptre S_i , et $C_i = \frac{n_0n_i}{K_i}$ la convergence du système formé par $S_1, S_2, \dots S_i$. Appelons Γ_i la valeur, au point A_i considéré comme point image dans le milieu n_i , du rapport de convergence dans ce dernier système; à la distance e_i du point A_i dans le milieu n_i le rapport de convergence a une valeur Γ telle, que $ne_i = K_i \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma_i} \right)$; mais au point A_{i+1} se trouve la surface S_{i+1} suivie du milieu n_{i+1} , le rapport de convergence, dans le système $S_1 S_2 \dots S_{i+1}$, du point image A_{i+1} sera donné par $\Gamma_{i+1} = \Gamma \times \frac{n_i}{n_{i+1}}$, d'où

$$\frac{1}{n_{i+1}\Gamma_{i+1}} = \frac{1}{n_i\Gamma_i} + \frac{e_i}{K_i} = \frac{1}{n_i\Gamma_i} + \frac{1}{n_0} C_i$$

on en tirera par substitutions successives, et puisque $\frac{1}{n_1 \Gamma_1} = \frac{1}{n_0}$

$$\frac{1}{n_p \Gamma_p} = \frac{1}{n_0} \left(1 + \frac{C_1}{\gamma_1} + \frac{C_2}{\gamma_2} + \dots \frac{C_{p-1}}{\gamma_{p-1}} \right).$$

Pour avoir la convergence C_p du système $S_1, S_2, \dots S_p$ il suffit d'appliquer la formule (17) en remplaçant c par C_{p-1} , c' par c_p , Γ' par $\frac{n_{p-1}}{n_p}$, Γ par Γ_{p-1} , n par n_{p-1} , n_0 par n_p et e par e_{p-1}

$$n_{p-1} C_p = C_{p-1} n_{p-1} + \frac{n_0 c_p}{\Gamma_{p-1}} + e_{p-1} c_p C_{p-1}$$

$$\begin{aligned} C_p &= C_{p-1} + c_p \left(1 + \frac{C_1}{\gamma_1} + \frac{C_2}{\gamma_2} + \dots \frac{C_{p-2}}{\gamma_{p-2}} \right) + \frac{c_p C_{p-1}}{\gamma_{p-1}} \\ &= C_{p-1} + c_p \left(1 + \frac{C_1}{\gamma_1} + \frac{C_2}{\gamma_2} + \dots \frac{C_{p-1}}{\gamma_{p-1}} \right) \end{aligned}$$

ou encore, si on écrit les convergences d'indice décroissant et si on fait la somme,

$$\begin{aligned} C_p &= c_1 + c_2 + \dots c_p + \frac{C_1}{\gamma_1} (c_2 + c_3 + \dots c_p) \\ &\quad + \dots + \frac{C_{p-2}}{\gamma_{p-2}} (c_{p-1} + c_p) + \frac{C_{p-1}}{\gamma_{p-1}} c_p. \end{aligned}$$

Sous ces formes on voit aisément : 1° Que si $C_1, C_2, \dots C_{p-1}$ contiennent en dénominateur toutes les combinaisons des γ qui entrent dans leur formule 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, $\dots (p-1)$ à $(p-1)$, C_p contiendra ces combinaisons et en plus toutes les combinaisons dans lesquelles figurera une lettre de plus; 2° Que l'une quelconque de ces combinaisons aura au numérateur toutes les convergences; 3° Que ces convergences seront associées de la manière suivante : considérons la suite $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{p-1}$; supprimons les γ qui figurent au dénominateur du terme considéré, puis formons des produits en faisant correspondre, à chaque γ isolé la somme des convergences des surfaces situées de part et d'autre, à chaque groupe d' γ contigus, au nombre de h , la somme des $(h+1)$ convergences qui les comprennent, et achevons le produit complet en mettant en facteur les convergences qui ne figurent pas dans l'expression déjà formée.

On a ainsi l'expression générale de la convergence du système en fonction des convergences des dioptries qui le composent.

On aura ensuite facilement la distance frontale du foyer-image $\overline{A_p F_p} = \varphi_p = -\frac{K_p}{n_p \Gamma_p} = -\frac{n_p}{C_p} \cdot \frac{\partial C_p}{\partial c_p}$ car on a évidemment $\frac{1}{n_p \Gamma_p} = \frac{1}{n_0} \frac{\partial C_p}{\partial c_p}$.

Le retour inverse nous fournira de même la distance frontale objet

$$\varphi_0 = \frac{n_0}{C_p} \frac{\partial C_p}{\partial c_1} = \overline{A_1 F_0}.$$

Si les dioptries sont supposés avoir leurs sommets au même point de l'axe

$$\frac{\partial C_p}{\partial c_1} = \frac{\partial C_p}{\partial c_p} = 1 \text{ et on retrouve } \frac{\varphi_p}{\varphi_0} = -\frac{n_p}{n_0}.$$

Calcul semi-graphique de la convergence et détermination des plans principaux.

Les formules générales exigent, pour le calcul des éléments d'un système formé par un nombre un peu grand de surfaces séparées, un travail, qui par suite de l'accroissement extrêmement rapide du nombre des termes, ne tarde pas à devenir à peu près impossible à accomplir; dans les mêmes cas, les constructions classiques s'avèrent bientôt inextricables, et les calculs correspondants très fastidieux; une solution semi-graphique d'une grande simplicité relative paraît devoir rendre de réels services.

Nous allons appliquer la formule (17')

$$C = c + c' + \frac{e}{n} cc'$$

où e représente la distance de Q plan principal image du premier système, à P' plan principal objet du second. Si nous supposons appliquées respectivement aux deux points q, p' , distants de $\frac{e}{n}$ deux forces parallèles c et $c' \left(1 + \frac{ec}{n}\right)$, la résultante sera précisément C , et son point d'application sera α , tel que

$$\overline{\alpha p'} = \frac{e}{n} \frac{c}{C}.$$

D'autre part, le point principal image du système total est donné par $n'_0 \overline{Q'\pi'} = k' \left(\frac{n'_0}{n} - \gamma \frac{n'_0}{n_0} \right)$, et en remplaçant k' et γ au moyen des formules (16) où

$$\Gamma = \frac{n_0}{n} \text{ et } \Gamma' = \frac{n}{n'_0} \quad \frac{\overline{Q'\pi'}}{n'_0} = \frac{e}{n} \frac{c}{C} = \frac{1}{\alpha p'}.$$

On a donc, par la composition de deux forces, déterminé la convergence et le plan principal image; une construction en sens inverse déterminerait par la composition des forces c' et $c \left(1 + c' \frac{e}{n} \right)$, le plan principal objet.

Cette construction, envisagée en elle-même, n'a pas un grand intérêt, mais devenue plus simple par la coïncidence des points principaux P' et Q' , elle permet de résoudre assez simplement le problème complexe de la composition d'un nombre quelconque de dioptries.

Faisons correspondre (*fig. 5*) au système de sommets $A_1, A_2, \dots A_p$, distants de $e_1, e_2, \dots e_{p-1}$, un système de points alignés $a_1, a_2, \dots a_p$ distants de $\frac{e_1}{n_1}, \frac{e_2}{n_2}, \dots \frac{e_{p-1}}{n_{p-1}}$; avec un sens bien défini appliquons au point a_1 une force perpendiculaire à l'axe et égale à c_1 convergence de S_1 , au point a_2 la force $c_2 (1 + \overline{a_1 a_2} \times c_1)$; la résultante C_2 convergence de l'ensemble (S_1, S_2) , sera appliquée en un point α_2 tel que $\overline{\alpha_2 a_2} = \overline{a_1 a_2} \times \frac{c_1}{C_2}$; mais ce point α_2 considéré dans le milieu n_2 représente le point principal image π'_2 de (S_1, S_2) , car on a $\overline{\pi'_2 A_2} = n_2 \frac{e_1}{n_1} \frac{c_1}{C}$, et cette distance transportée dans le système corrélatif est précisément $\overline{\pi'_2 A_2} : n_2 = \overline{\alpha_2 a_2}$; on pourra donc combiner de la même manière le système (S_1, S_2) et la surface S_3 en appliquant en a_2 la force $c_3 (1 + \overline{\alpha_2 a_3} \cdot C_2)$ et en cherchant la résultante de cette force et de la force C_2 appliquée en α_2 ; la résultante C_3 convergence de (S_1, S_2, S_3) sera appliquée en un point α_3 qui représentera le point principal image de ce système, et tel que $\overline{\alpha_3 a_3} = \overline{\alpha_2 a_3} \frac{C_1}{C_3}$; en continuant ainsi on arrivera en α_{p-1} , point d'application de la force C_{p-1} [convergence du système $(S_1, S_2, \dots S_{p-1})$] et représentant aussi le point principal image; cette force composée avec

$c_p (1 + \overline{\alpha_{p-1} a_p} C_{p-1})$ donnera comme résultante finale la convergence C_p du système appliquée au point α_p , tel que

$$\alpha_p a_p = \alpha_{p-1} a_p \times \frac{C_{p-1}}{C_p},$$

et pour placer le point principal image dans le système lui-même, il suffira de porter

$$\overline{A_p \pi'} = n_p \overline{a_p \gamma_p}$$

Les constructions analogues effectuées en sens inverse détermineraient le point principal objet; les deux déterminations de la convergence fourniront un contrôle des opérations graphiques et arithmétiques effectuées dans un sens et dans l'autre.

CHAPITRE III

Étude d'un système centré suivant deux droites conjuguées contenues dans une section principale.

Nous allons retrouver sur les deux directions considérées, des propriétés ayant une analogie très grande avec celles des points conjugués sur l'axe.

FOCALES TANGENTIELLES. — Reprenons l'équation (9) des focales tangentielles

$$(9) \quad \frac{\delta u'}{n l \delta u} - \frac{\delta u}{n' l' \delta u'} = \frac{1}{k_i}$$

le rapport $\delta u' : \delta u$ joue évidemment ici le rôle de rapport de convergence, on le désignera par γ_i et

$$\frac{\gamma_i}{n l} - \frac{1}{\gamma_i n' l'} = \frac{1}{k_i}.$$

On déterminera : 1° les points limites ou focales principales qui correspondent aux points à l'infini :

a) Sur le rayon incident on aura la focale principale objet, telle qu'un point lumineux y donne naissance, par réfraction *dans le plan de la section principale*, à un faisceau de rayons parallèles; l'abscisse T de ce point est $T = \frac{k_i \gamma_i}{n}$.

b) Sur le rayon émergent, on obtiendra la focale principale image, élément de droite perpendiculaire à la section principale, produite par un faisceau parallèle de rayons incidents, l'abscisse de cette focale est $T' = - \frac{k_i}{n' \gamma_i}$.

Or, en raison des propriétés connues de la division homogra-

phique, si on prend pour origine les points limites, les anciennes origines étant conjuguées on a : $TT' = \text{Constante} = -\frac{k_i^2}{nn'}$, pour la même raison que précédemment k_i est une constante indépendante de γ_i c'est-à-dire des origines.

Il faut remarquer qu'ici il n'y a rien d'analogue aux points de Bravais, les droites, bases des divisions homographiques, étant distinctes.

On peut établir, à peu près comme sur l'axe, l'existence et la valeur des divers grossissements; il faut simplement préciser leur signification; en un point de la direction incidente D (*fig. 4 bis*) plaçons sur une perpendiculaire à cette direction, dans la section principale, deux points lumineux T_1, T_0 ; en un point de la direction conjuguée D', nous recueillerons deux petites droites lumineuses $T_1'T_0'$ perpendiculaires à la section principale, et nous appellerons grossissement latéral ξ_i le rapport des distances $\overline{T_1'T_0'} : \overline{T_1T_0}$ comptées dans la section principale; on pourrait évaluer ce rapport, ainsi qu'on l'a fait sur l'axe, comme une limite; une autre méthode permettra le calcul direct; on déterminera d'abord les formules qui lient les segments aux rapports de convergence de leurs extrémités; ces formules résultent de la comparaison des équations :

$$\frac{\gamma_i}{nl} - \frac{1}{n'l'\gamma_i'} = \frac{1}{k_i} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_i'}{n'l} - \frac{1}{n'l'\gamma_i'} = \frac{1}{k_i}$$

qui donnent, γ_i et γ_i' étant respectivement les rapports de convergence en M et T_0 ,

$$(17) \quad l = \frac{k_i}{n} (\gamma_i - \gamma_i') = \overline{MT_0}, \quad l' = \frac{k_i}{n'} \left(\frac{1}{\gamma_i'} - \frac{1}{\gamma_i} \right) = \overline{M'T_0'}, \quad \frac{nl}{n'l'} = \gamma_i \gamma_i'.$$

Or, $\partial y = T_0 T_1 = l \partial u$ $\partial y' = T_0' T_1' = l' \partial u'$, l'équation (9) devient

$$\frac{\partial u'}{n \partial y} - \frac{\partial u}{n' \partial y'} = \frac{1}{k_i} \quad \text{ou} \quad \frac{n' \partial y'}{n \partial y} - \frac{\partial u}{\partial u'} = \frac{n'l'}{k_i} = \frac{1}{\gamma_i'} - \frac{1}{\gamma_i}$$

d'où

$$\frac{n' \partial y'}{n \partial y} = \frac{1}{\gamma_i'} = \frac{n'}{n} \beta_i'.$$

Les équations (17) donnent de même la relation entre γ_t et le grossissement longitudinal défini comme sur l'axe, car

$$dl = -\frac{k_t}{n} d\gamma_t \quad dl' = -\frac{k_t}{n'} \frac{d\gamma_t}{\gamma_t^2} \quad \alpha_t = \frac{dl'}{dl} = \frac{n}{n'} \frac{1}{\gamma_t^2} = \frac{n'}{n} \beta_t^2.$$

La notion de points inverses correspond ici à $\gamma_t, \gamma_t' = 1$ et

$$(13') \quad nt = n'l' = k_t \left(\gamma_t - \frac{1}{\gamma_t} \right).$$

L'analogie que toutes ces formules mettent en évidence, va nécessairement se retrouver dans la détermination des éléments dits cardinaux; il suffit de répéter mot à mot ce qui a été dit pour les points de l'axe, en donnant à toutes les lettres l'indice t ; dès lors, la construction géométrique habituelle pourra être employée pour la détermination d'une focale tangentielle conjuguée, la seule différence proviendra de la position des plans principaux P_t, P_t' qu'on tracera perpendiculairement, l'un à la direction prise dans l'espace objet, l'autre à la direction conjuguée de l'espace image.

Pour construire la focale tangentielle conjuguée d'un point M , on élèvera MN perpendiculaire à la direction incidente, on mènera NI parallèle à la direction incidente jusqu'au point I dans le plan P_t , on joindra NF_t et on prolongera jusqu'en J dans le même plan P_t ; on portera les longueurs P_tI, P_tJ en $P_t'I', P_t'J'$ dans le plan principal image, on joindra $I'F_t'$, par J' on mènera une droite parallèle à la direction émergente, ces deux droites se couperont en N' , dont la projection M' sur la direction émergente est le milieu de la focale tangentielle conjuguée de M ; il est essentiel de remarquer que cette construction ne donne en N' la focale tangentielle conjuguée de N que si les deux points M, N , sont extrêmement voisins.

FOCALES SAGITTALES. — L'équation (8) des focales sagittales ne se prête pas immédiatement à une comparaison faisant ressortir l'analogie de propriétés des focales sagittales et des points conjugués sur l'axe, car les origines imposées sont toutes situées sur l'axe du système.

Mais il est possible de mettre l'équation des focales sagittales sous une forme dans laquelle les origines seront deux focales sagittales conjuguées quelconques.

Pour cela nous devons d'abord préciser ce qu'on entend par rapport de convergence relatif à deux focales sagittales conjuguées :

Reprenons l'un des dioptrés du système (*fig. 2*); par l'axe du système centré menons deux plans X, Y faisant entre eux un dièdre infiniment petit Δ . Supposons X et Y placés symétriquement par rapport au plan de la figure; soient pour le dioptré considéré deux focales sagittales conjuguées sur l'axe O_1, O_2 , deux rayons issus de O_1 d'inclinaison égale u_1 et situés dans X, Y, rencontrent la surface en deux points $A_1 B_1$ dont les normales se coupent en C, sur l'axe, tandis que les rayons réfractés de même inclinaison u_2 viennent se rencontrer en O_2 .

Sur le rayon $O_1 I_1$ d'inclinaison u_1 dans le plan de la figure, considérons un point (ou une focale sagittale) S_1 , la focale sagittaleconjuguée sera, sur $O_2 I_1$, au point S_2 en ligne droite avec S_1 et C_1 ; les trois droites infiniment voisines $S_1 A_1, S_1 I_1, S_1 B_1$ auront respectivement pour conjuguées $S_2 A_1, S_2 I_1, S_2 B_1$; le rapport $A_1 S_2 B_1 : A_1 S_1 B_1$ devra être regardé comme le rapport de convergence des deux focales sagittales $S_1 S_2$, dans un plan perpendiculaire au plan de la figure.

Pour évaluer ce rapport, remarquons : 1° Que si dans le petit cercle qui passe par A_1, I_1, B_1 nous menons les normales à la circonférence, elles se coupent en un point Q_1 de l'axe et déterminent entre elles l'angle 'plan $A_1 Q_1 B_1$ qui mesure Δ ; dès lors on voit que $A_1 O_1 B_1 = \Delta \sin u_1, A_1 O_2 B_1 = \Delta \sin u_2$, et, en évaluant $A_1 B_1$ de deux manières différentes,

$$\begin{aligned} A_1 B_1 &= \widehat{A_1 S_1 B_1} \times \overline{S_1 I_1} = \Delta \sin u_1 \times \overline{O_1 I_1} \\ A_1 B_1 &= \widehat{A_1 S_2 B_1} \times \overline{S_2 I_1} = \Delta \sin u_2 \times \overline{O_2 I_1} \\ \frac{\widehat{A_1 S_2 B_1}}{\widehat{A_1 S_1 B_1}} &= \frac{\sin u_2}{\sin u_1} \times \frac{\overline{O_2 I_1}}{\overline{O_1 I_1}} \times \frac{\overline{S_1 I_1}}{\overline{S_2 I_1}} \end{aligned}$$

mais l'équation des focales sagittales est applicable aux points S_1, S_2, I_1 , en retranchant membre à membre on obtient

$$\frac{1}{n_1 \sin^2 u_1} \left(\frac{1}{\overline{O_1 S_1}} - \frac{1}{\overline{O_1 I_1}} \right) = \frac{1}{n_2 \sin^2 u_2} \left(\frac{1}{\overline{O_2 S_2}} - \frac{1}{\overline{O_2 I_1}} \right)$$

ou
$$\frac{\overline{S_1 I_1}}{n_1 \overline{O_1 S_1} \times \overline{O_1 I_1} \sin^2 u_1} = \frac{\overline{S_2 I_1}}{n_2 \overline{O_2 S_2} \times \overline{O_2 I_1} \sin^2 u_2}$$

ce qui permet d'écrire :

$$(18) \quad \frac{A_1 S_2 B_1}{A_1 S_1 B_1} = \frac{n_1 \overline{O_1 S_1} \sin u_1}{n_2 \overline{O_2 S_2} \sin u_2} = \gamma_{s_1}.$$

Considérons maintenant un élément linéaire normal à $C_1 O_1 I_1$, passant par le point S_1 , et limité aux deux plans X, Y, les focales sagittales conjuguées des points de cet élément linéaire auront leurs milieux sur un élément linéaire perpendiculaire à $O_2 I_1$, passant par le point S_2 et limité aux mêmes plans; le *grossissement latéral*, perpendiculairement au plan de la figure sera le rapport des longueurs de ces deux éléments, qui compris dans le même angle dièdre sont évidemment proportionnels à leurs distances à l'axe, on a donc

$$\beta_{s_1} = \frac{\overline{O_2 S_2} \sin u_2}{\overline{O_1 S_1} \sin u_1} = \frac{n_1}{n_2} \times \frac{1}{\gamma_{s_1}}.$$

A la deuxième réfraction l'angle $A_1 S_2 B_1$ devra être considéré comme l'angle des rayons incidents, et il sera lié à l'angle des nouveaux rayons réfractés par une relation analogue à (18) au numérateur de laquelle on aura $n_2 \overline{O S_2} \sin u_2$; il s'ensuit que dans la série des dioptries, on obtiendra le rapport de convergence relatif à tout le système en faisant le produit de tous les rapports de convergence individuels, ce qui éliminera toutes les abscisses intermédiaires et conduira à :

$$\gamma_s = \frac{n s_0 \sin u}{n' s'_0 \sin u'},$$

si s_0 , s'_0 sont les abscisses des focales S_0 et S'_0 par rapport aux origines situées sur l'axe; pour l'évaluation du grossissement latéral, il est plus simple de limiter tous les éléments linéaires aux mêmes plans X, Y, ce qui donne immédiatement :

$$\beta_s = \frac{s'_0 \sin u'}{s_0 \sin u} = \frac{n}{n'} \times \frac{1}{\gamma_s} = \frac{h'}{h}.$$

Pour obtenir l'équation des focales sagittales avec origines en S_0 , S'_0 , il suffit d'écrire l'équation (8) pour les focales origines et

pour les focales S, S' dont les abscisses S₀S, S'₀S' sont respectivement s et s', on a :

$$\frac{\sin u'}{n(s + s_0) \sin u} - \frac{\sin u}{n'(s' + s'_0) \sin u'} = \frac{1}{k},$$

$$\frac{\sin u'}{ns_0 \sin u} - \frac{\sin u}{n's'_0 \sin u'} = \frac{1}{k},$$

et

$$ns_0 \sin u = \gamma_s n' s'_0 \sin u'$$

en éliminant s₀ et s'₀ entre ces trois équations, on obtient

$$(19) \quad \frac{\gamma_s}{ns} - \frac{1}{n's'\gamma_s} = \frac{1}{k_s}$$

il n'est pas besoin de démontrer dans cette relation que $\frac{1}{k_s}$ est indépendant de γ_s , cela résulte de l'établissement de la formule (19), de plus on a démontré aussi la formule $\beta_s = \frac{n}{n'} \times \frac{1}{\gamma_s}$; à cela près, il n'y a rien à changer aux considérations relatives aux focales tangentielles, il suffit partout de substituer l'indice s à l'indice l.

Mais les valeurs de β_s et γ_s permettent de donner à quelques résultats des formes particulièrement simples : en effet,

$$\beta_s = \frac{h'}{h} \quad \gamma_s = \frac{nh}{n'h'}$$

1° Les points principaux $\beta_s = 1$ donnent $h = h'$

Ils sont situés à la même distance de l'axe;

2° Les points antiprincipaux $\beta_s = -1$, $h = -h'$, sont équidistants de l'axe, de part et d'autre de celui-ci.

Pour les points nodaux et antinodaux $nh = n'h'$, $nh = -n'h'$, leurs distances à l'axe sont en raison inverse des indices, du même côté de l'axe pour les points nodaux, de part et d'autre de l'axe pour les points antinodaux.

On conçoit combien ces remarques facilitent la détermination des éléments cardinaux relatifs aux focales sagittales.

Ces éléments étant fixés, la construction géométrique de la focale sagittale conjuguée d'un point de la direction incidente, sera identique à la construction de la focale tangentielle, et ainsi ressortira le caractère purement géométrique de la construction, puisque

relative à des rayons situés dans des plans perpendiculaires à la section principale, elle sera réalisée dans ce plan.

Directions afocales.

Il pourra arriver, soit pour les focales sagittales, soit pour les focales tangentielles, que les foyers étant rejetés à l'infini, il n'y ait plus ni points nodaux, ni plans principaux; dans ce cas, deux rayons incidents parallèles, très voisins, donnent naissance à deux rayons émergents parallèles; mais cette circonstance ne se présente pas en général, à la fois, pour les rayons situés dans la section principale et pour des rayons appartenant à des plans perpendiculaires à cette section.

Dans le cas afocal, il est aisé de voir que les rapports de convergence, et par suite les grossissements, seront des constantes pour tous les couples de points qui se correspondent sur les deux droites conjuguées, et deux segments conjugués quelconques de ces deux droites seront liés par l'une des relations

$$ns : n's' = \gamma_s^2 \quad \text{ou} \quad nl : n'l' = \gamma_l^2$$

les constantes $\frac{1}{k_s}$ ou $\frac{1}{k_l}$ étant nulles.

Équations résultantes.

Si, envisageant un premier système, on y considère une droite D_0 de l'espace-objet, rencontrant l'axe, et sa conjuguée D_1 , celle-ci pourra être reçue dans un second système ayant même axe que le premier, et donnera naissance à une droite D_2 conjuguée de D_0 par rapport au système résultant; on pourra trouver comme précédemment, et en opérant exactement de la même manière, une relation entre les rapports de convergence et les constantes; cette relation

$$(20) \quad \frac{1}{K_l} = \frac{\gamma_l'}{k_l} + \frac{1}{\gamma_l k_l'} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{K_s} = \frac{\gamma_s'}{k_s} + \frac{k_s}{\gamma_s k_s'}$$

jointe à la condition

$$\Gamma_l = \gamma_l \gamma_l' \quad \text{ou} \quad \Gamma_s = \gamma_s \gamma_s'$$

pourrait fournir des relations analogues aux formules (16).

Dans tous les cas, la relation (20) permet le calcul de proche en proche des constantes, sur la succession des directions conjuguées de D_0 ; si les systèmes successifs considérés sont des dioptries, on voit que l'on pourra calculer ainsi, d'une façon plus ou moins aisée, le coefficient $\frac{1}{K_t}$ ou $\frac{1}{K_s}$ relatif au système total.

Si ce coefficient est nul, on obtient

$$\text{Soit : } \Gamma_t = \gamma_t \gamma'_t = -\frac{k_t}{k'_t}, \quad \text{soit : } \Gamma_s = \gamma_s \gamma'_s = -\frac{k_s}{k'_s}.$$

D'ailleurs, on peut déterminer graphiquement toutes les quantités qu'il faut connaître, en plaçant, dans chaque dioptrie, les points cardinaux.

Application à un dioptrie.

ÉLÉMENTS SAGITTAUX. — Soient deux droites conjuguées D_0, D_1 , d'une section principale, se coupant au point d'incidence I (*fig. 6*).

1° En ce point I sont confondus les deux points principaux, objet et image, qui doivent être équidistants de l'axe, et où $\beta_s = 1$.

2° Par le point I menons les deux bissectrices de l'angle aigu et de l'angle obtus des droites conjuguées; les perpendiculaires menées par le centre à ces deux bissectrices déterminent, par leur intersection avec D_0, D_1 , les points nodaux et anti-nodaux; la perpendiculaire CQ à la bissectrice de l'angle aigu détermine N_s sur D_0 , N'_s sur D_1 tels que

$$\overline{CN_s} : \sin i = \overline{CN'_s} : \sin i'$$

or $\overline{CN_s}$ et $\overline{CN'_s}$ sont proportionnels aux distances à l'axe h, h' , dès lors

$$nh = n'h'$$

De même l'autre perpendiculaire donne B_s sur D_0 et B'_s sur D_1 tels que le triangle $B_s B'_s I$ étant isocèle, on ait

$$\overline{CB_s} : \sin i = \overline{CB'_s} : \sin i'$$

et comme $\overline{CB_s}$ et $\overline{CB'_s}$ sont proportionnels aux distances à l'axe : h_1, h'_1

$$nh_1 = n'h'_1.$$

3° Les points F_s, F'_s ou points focaux s'obtiennent en prenant les milieux des segments $\overline{N_s B_s}$ et $\overline{N'_s B'_s}$. On aurait ensuite aisément les points anti-principaux.

Le calcul de k_s est très facile; d'après la construction des points nodaux et la valeur $\frac{n}{n'}$ du rapport de convergence au point I on a

$$-nR \cos \frac{i+i'}{2} = k_s \left(1 - \frac{n}{n'}\right) \cos \frac{i-i'}{2} = QI$$

$$(21) \quad k_s = - \frac{nn'R \cos \frac{i+i'}{2}}{(n'-n) \cos \frac{i-i'}{2}} = k \frac{\cos \frac{i+i'}{2}}{\cos \frac{i-i'}{2}} = k \frac{n \cos i + n' \cos i'}{n' + n}$$

$k = -R \frac{nn'}{(n'-n)}$ représentant la constante de l'approximation de Gauss.

$$\text{Si le dioptré est quelconque, la formule } k_s = - \frac{nn'R \cos \frac{i+i'}{2}}{(n'-n) \cos \frac{i-i'}{2}}$$

subsiste seule, R représentant la longueur de la normale, du point d'incidence à l'axe.

ÉLÉMENTS TANGENTIELS. — On sait que les projections du centre de courbure sur les droites conjuguées, sont des points conjugués de la division homographique des focales tangentielles; il est facile de montrer que ce sont précisément les points nodaux du système tangentiel; si par ces points N_t, N'_t on mène deux rayons conjugués rencontrant la surface du dioptré au point J, on a évidemment

$$IJ = \frac{\overline{N_t I} dv}{\cos i} = \frac{\overline{N'_t I} dv'}{\cos i'}$$

dv, dv' étant les angles des rayons avec les droites D_0, D_1 ; mais

$$\overline{N_t I} = -R \cos i \quad \overline{N'_t I} = -R \cos i'$$

donc

$$dv = dv' \quad \text{et} \quad \gamma_t = 1.$$

Au point I, $di' : di$ égale, en vertu de la loi de Descartes, $n \cos i : n' \cos i'$; on calculera donc k_i par la formule

$$k_i \left(1 - \frac{n \cos i}{n' \cos i'} \right) = -n R \cos i$$

d'où

$$(22) \quad k_i = -R \frac{nn' \cos i \cos i'}{n' \cos i' - n \cos i} = - \frac{Rnn' \cos \frac{i' + i}{2}}{(n' - n) \cos \frac{i - i'}{2}} \cos i \cos i'.$$

R désignant ici le rayon de courbure, on voit que dans le dioptré sphérique on a

$$k_i = k_s \cos i \cos i'.$$

Il sera dès lors facile de placer les foyers et les plans principaux; les points anti-nodaux sont à des distances des points nodaux qui égalent respectivement, $\overline{N_i B_i} = 2 \frac{k_i}{n}$. $\overline{N'_i B'_i} = -2 \frac{k_i}{n'}$.

$N_i F_i = \frac{k_i}{n}$ $N'_i F'_i = -\frac{k_i}{n'}$ et les longueurs focales qui sont respectivement $f_i = \frac{k_i}{n}$ $f'_i = -\frac{k_i}{n'}$ permettront de placer les plans principaux. Dans le cas particulier du dioptré *sphérique*, les *foyers* des deux systèmes de points ont des relations de position assez remarquables (déjà connues d'ailleurs) :

$$\overline{IF_s} = \frac{k_s}{n'} \quad \overline{IF'_s} = -\frac{k_s}{n}$$

$$\overline{IF_i} = \frac{k_i}{n} \frac{n \cos i}{n' \cos i'} \quad \overline{IF'_i} = -\frac{k_i}{n'} \frac{n' \cos i'}{n \cos i} \quad \text{et comme } k_i = k_s \cos i \cos i'$$

$$\overline{IF_i} = \overline{IF_s} \cos^2 i \quad \overline{IF'_i} = \overline{IF'_s} \cos^2 i'$$

on obtiendra le foyer tangentiel en projetant le foyer sagittal, sur le diamètre qui passe par le point d'incidence et en projetant de nouveau sur la direction initiale (D_0 ou D_1) le pied de cette perpendiculaire.

On voit donc que non seulement on peut faire le calcul de proche en proche, mais encore, avec les éléments cardinaux de deux dioptrés,

sur les droites $D_1 D_0$, et sur les droites $D_1 D_2$ conjuguées par rapport au deuxième, on peut déterminer, sur les droites D_0, D_2 conjuguées par rapport aux deux dioptries pris ensemble, les éléments cardinaux de cet ensemble; les constructions géométriques, à la petite différence déjà signalée près, seront identiques à celle des éléments considérés sur l'axe.

De même une petite modification dans les méthodes usitées permettra la détermination expérimentale des éléments cardinaux d'un système pour les focales sagittales et pour les focales tangentielles suivant deux directions conjuguées D_0, D_1 .

Ayant orienté un banc d'optique suivant D_0 et un deuxième suivant D_1 , on prendra comme objet l'image réelle d'une division lumineuse; le plan d'incidence étant horizontal, pour les focales tangentielles, la division sera horizontale et ses traits verticaux. On déterminera micrométriquement la valeur d'un intervalle; puis on déplacera tout le système producteur de l'image-objet, et on recueillera l'image, ou plutôt la pseudo-image, à l'aide du microscope. Lorsque l'image et l'objet seront égaux, on aura les plans principaux qu'on repérera par rapport aux points d'incidence et d'émergence; une manœuvre analogue donnera les plans principaux négatifs, et de là les foyers, qui d'ailleurs peuvent être déterminés directement à l'aide de la même division placée au foyer d'un collimateur.

La détermination des éléments sagittaux se fera suivant un procédé identique; il suffira d'employer comme objet une division placée verticalement, les traits étant horizontaux c'est-à-dire parallèles au plan d'incidence, on obtiendra une pseudo-image formée de traits également parallèles à ce plan, là où se forment les aires d'amincissement qui correspondent aux focales sagittales.

Sur les aberrations chromatiques et sur l'achromatisme.

Aberrations ponctuelles, axiales.

L'importance des aberrations chromatiques est telle qu'un système centré n'est, le plus souvent, utilisable que si ces aberrations sont suffisamment corrigées.

Examinons, tout d'abord, la solution actuelle du problème de l'achromatisme.

Pour les systèmes minces dont les milieux extrêmes sont les mêmes, le problème est complètement résolu (dans l'approximation de Gauss) par le procédé classique, en écrivant que la variation de la longueur focale (ou de la convergence) est nulle quand on fait subir à la longueur d'onde, et par suite aux indices, une variation du premier ordre.

Si on a affaire à des systèmes épais, tels que les oculaires composés, on se contente aussi d'écrire $\delta \frac{1}{f} = 0$, ce qui permet d'obtenir des systèmes de même puissance pour deux radiations différentes; en réalité la question est un peu plus complexe, puisque d'une part toutes les images des diverses couleurs ne peuvent être à l'infini, à la fois, et que d'autre part l'œil ne peut être à la fois placé aux foyers-images de toutes les radiations.

Mais dans le cas des images réelles, la condition $\delta \frac{1}{f} = 0$ est tout à fait insuffisante pour assurer un repli convenable du spectre axial; les conditions supplémentaires qu'il est nécessaire d'écrire paraissent être, en général, assez arbitrairement choisies.

Il est aisé de voir que, dans l'approximation envisagée, les conditions à réaliser pour achromatiser le système sont au nombre de trois : en effet, un point-objet et son image en lumière de longueur d'onde λ , décrivent sur l'axe deux divisions homographiques; dès lors les deux images en lumière λ, λ' du même point-objet, forment

également deux divisions homographiques, et pour assurer la coïncidence de toutes les images λ avec toutes les images λ' du point-objet supposé mobile, il faudra exprimer que cette coïncidence aura lieu pour trois d'entre elles.

Il peut être impossible de satisfaire à ces trois conditions; or, dans un grand nombre de cas, on n'utilise le système que pour une seule position de l'objet, et dès lors, il suffit que l'achromatisme soit réalisé pour cette position; mais d'après la remarque faite plus haut, puisque les images λ et λ' du même point forment deux divisions homographiques, il existe nécessairement deux points doubles (réels ou imaginaires), et en l'un de ces points coïncident une image λ et une image λ' du point lumineux; le spectre axial est donc replié; il nous suffira, pour l'achromatisme du point utilisé, d'exprimer qu'il est un de ces points doubles, condition unique bien plus aisément réalisable que l'ensemble des trois conditions.

Quoi qu'il en soit, on obtiendra des conditions explicitées d'une manière plus rationnelle que celle qu'on a employée jusqu'ici, par la méthode suivante :

L'équation du premier dioptré s'écrit (origine au centre) :

$$\frac{1}{n_0 q_0} - \frac{1}{n_1 q_1} = \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_0} \right) = \frac{1}{k_1}$$

si on fait varier à la fois les abscisses et les indices on a :

$$-\frac{dn_0}{n_0^2} \left(\frac{1}{q_0} + \frac{1}{R_1} \right) + \frac{dn_1}{n_1^2} \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{n_0 dq_0}{n_0^3 q_0^2} - \frac{n_1 dq_1}{n_1^3 q_1^2}$$

or si on exprime les abscisses q_0 et q_1 à l'aide des formules (12)

$$n_0 q_0 = k_1 (1 - \gamma_1) \quad n_1 q_1 = \frac{k_1 (1 - \gamma_1)}{\gamma_1}$$

l'équation devient :

$$n_0 dq_0 - \gamma_1^2 n_1 dq_1 = \frac{k_1 (1 - \gamma_1) (n_0 - n_1 \gamma_1)}{n_1 - n_0} \left(\frac{dn_0}{n_0} - \frac{dn_1}{n_1} \right);$$

pour le dioptré suivant, l'origine des abscisses change mais, les variations demeurent les mêmes et on a :

$$n_1 dq_1 - \gamma_2^2 n_2 dq_2 = \frac{k_2}{n_2 - n_1} (1 - \gamma_2) (n_1 - n_2 \gamma_2) \left(\frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn_2}{n_2} \right);$$

éliminant dq_1 et remarquant que $\gamma_1\gamma'_2 = \Gamma$, rapport de convergence du système résultant,

$$n_0 dq_0 - \Gamma^2 n_2 dq_2 = \frac{k_1 (1 - \gamma_1) (n_0 - n_1 \gamma_1)}{n_1 - n_0} \left(\frac{dn_0}{n_0} - \frac{dn_1}{n_1} \right) + \frac{k_2 (\gamma_1 - \Gamma) (n_1 \gamma_1 - n_2 \Gamma)}{n_2 - n_1} \left(\frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn_2}{n_2} \right);$$

or, si K désigne la constante du système résultant on a (15)

$$\gamma_1 = \Gamma \frac{K}{k_1} + \frac{K}{k_2}$$

$$(23) \quad n_0 dq_0 - \Gamma^2 n_2 dq_2 = a_0 \frac{dn_0}{n_0} + a_1 \frac{dn_1}{n_1} + a_2 \frac{dn_2}{n_2}$$

a_0, a_1, a_2 , étant des fonctions du deuxième degré de Γ ; il est visible que l'élimination continuerait de la même manière et que finalement on obtiendrait :

$$n_0 dq_0 - \gamma^2 n_p dq_p = A_0 \frac{dn_0}{n_0} + A_1 \frac{dn_1}{n_1} + \dots + A_p \frac{dn_p}{n_p}$$

$A_0, A_1, \dots A_p$ étant des fonctions du second degré en γ .

Si nous désignons par n et n' les indices des milieux extrêmes, par dx, dx' , les déplacements qui correspondent à une variation $d\lambda$ de la longueur d'onde, on a

$$(23') \quad ndx - \gamma^2 n' dx' = (L\gamma^2 + M\gamma + N) d\lambda = Cd\lambda$$

la fonction C constituant la fonction de chromatisme du système, L, M, N étant fonctions de toutes les constantes du système et de $\frac{dn_0}{d\lambda}, \frac{dn_1}{d\lambda} \dots \frac{dn_p}{d\lambda}$ qui y figurent linéairement.

1° Si on veut réaliser l'achromatisme en un point où le rapport de convergence est γ_0 il suffira que l'on ait

$$L\gamma_0^2 + M\gamma_0 + N = 0$$

2° Si on a les deux conditions

$$\gamma_0 = -\frac{M}{2L} = -\frac{2N}{M}$$

il y aura achromatisme, non seulement au point γ_0 mais en un point infiniment voisin.

3° Enfin le système sera achromatique si on a à la fois

$$L = 0 \quad M = 0 \quad N = 0$$

Aberrations chromatiques angulaires et latérales.

Dans ce qui précède, nous avons envisagé uniquement l'achromatisme ponctuel axial; or si l'objet est un élément de droite perpendiculaire à l'axe, l'achromatisme ne pourra être obtenu que si les droites-images ont la même hauteur; pour un système dont les milieux extrêmes sont les mêmes, les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, assurent l'achromatisme angulaire et l'achromatisme latéral, car dans un tel système tout est déterminé (à une ambiguïté de signe près) par la connaissance de trois couples de points conjugués; à la coïncidence des points-images formés par deux radiations de longueur d'onde différente, correspondent des rapports de convergence et des grandissements égaux; en dehors de ce cas, l'existence de l'achromatisme ponctuel axial n'entraîne pas celle des deux autres, nécessairement. Si, par exemple, les milieux extrêmes sont différents (objectif à immersion), l'équation dite de Lagrange $nHu = n'H'u'$ donne

$$(24) \quad \frac{dH}{H} - \frac{dH'}{H'} + \frac{du}{u} - \frac{du'}{u'} = \frac{dn'}{n'} - \frac{dn}{n}$$

l'achromatisme latéral $\left(\frac{dH}{H} - \frac{dH'}{H'} = 0\right)$ et l'achromatisme angulaire $\left(\frac{du}{u} - \frac{du'}{u'} = 0\right)$ ne peuvent avoir lieu simultanément au même point; on est donc conduit à rechercher les conditions de ces deux formes d'achromatisme.

Par les points d'abscisses q_0, q_1 (fig. 7), passent deux rayons conjugués d'inclinaison u_0, u_1 ; sur ces deux rayons, deux points conjugués de Gauss (confondus avec les focales sagittales) sont les sommets de deux petites droites conjuguées de hauteurs h_0, h_1 et dont les pieds ont les abscisses q'_0, q'_1 $\gamma_1 = \frac{u_1}{u_0}$ et $\gamma'_1 = \frac{n_0 h_0}{n_1 h_1}$;

les égalités $u_0 = \frac{h_0}{q'_0 - q_0}$, $u_1 = \frac{h_1}{q'_1 - q_1}$ nous donnent :

$$\frac{dh_0}{h_0} = \frac{du_0}{u_0} + \frac{dq'_0 - dq_0}{q'_0 - q_0} \quad \frac{dh_1}{h_1} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{dq'_1 - dq_1}{q'_1 - q_1}$$

et puisque les sommets de h_0 , h_1 , sont en ligne droite avec le centre

$$\frac{dh_0}{h_0} - \frac{dh_1}{h_1} = \frac{dq'_0}{q'_0} - \frac{dq'_1}{q'_1},$$

on en tire aisément

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{u_0} - \frac{du_1}{u_1} &= \frac{-q_0 dq'_0}{q'_0(q'_0 - q_0)} + \frac{q_1 dq'_1}{q'_1(q'_1 - q_1)} + \frac{dq_0}{q'_0 - q_0} - \frac{dq_1}{q'_1 - q_1} \\ \text{et } \frac{dh_0}{h_0} - \frac{dh_1}{h_1} &= -\frac{q_0 dq'_0}{q'_0(q'_0 - q_0)} + \frac{q_1 dq'_1}{q'_1(q'_1 - q_1)} + \frac{dq'_0}{q'_0 - q_0} - \frac{dq'_1}{q'_1 - q_1} \end{aligned}$$

Les deux premiers termes du second membre, s'écrivent en introduisant les rapports de convergence :

$$-(n_0 dq'_0 - \gamma_1'^2 n_1 dq'_1) \frac{(1 - \gamma_1)}{k_1 (1 - \gamma_1') (\gamma_1 - \gamma_1')}.$$

Or, d'après la première partie de cette étude, on a :

$$n_0 dq'_0 - \gamma_1'^2 n_1 dq'_1 = \frac{k_1 (1 - \gamma_1') (n_0 - n_1 \gamma_1')}{(n_1 - n_0)} \left(\frac{dn_0}{n_0} - \frac{dn_1}{n_1} \right)$$

on aura donc finalement

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{u_0} - \frac{du_1}{u_1} &= -\frac{k_1 (1 - \gamma_1) (n_0 - n_1 \gamma_1')}{(n_1 - n_0) k_1 (\gamma_1 - \gamma_1')} \left(\frac{dn_0}{n_0} - \frac{dn_1}{n_1} \right) + \frac{dq_0}{q'_0 - q_0} - \frac{dq_1}{q'_1 - q_1} \\ \text{et } \frac{dh_0}{h_0} - \frac{dh_1}{h_1} &= -\frac{k_1 (1 - \gamma_1) (n_0 - n_1 \gamma_1')}{(n_1 - n_0) k_1 (\gamma_1 - \gamma_1')} \left(\frac{dn_0}{n_0} - \frac{dn_1}{n_1} \right) + \frac{dq'_0}{q'_0 - q_0} - \frac{dq'_1}{q'_1 - q_1} \end{aligned}$$

On écrira des équations analogues pour les dioptries successifs; on voit immédiatement que les hauteurs, les angles, et les variations d'abscisses intermédiaires, s'éliminent par simple addition; quand au premier terme du deuxième membre, on obtient une élimination de proche en proche, tout à fait analogue à celle qui donne la fonction C, par les substitutions (15) $\gamma_1 = \Gamma \frac{K}{k_1} + \frac{K}{k_2}$, $\gamma_1' = \Gamma' \frac{K}{k'} + \frac{K}{k_2}$
 $\frac{1}{\gamma_2} = \frac{K}{k_1} + \frac{K}{k_2 \Gamma}$ $\frac{1}{\gamma_2'} = \frac{K}{k_1} + \frac{K}{k_2 \Gamma'}$, il suffit pour cela d'écrire le

premier terme du deuxième membre des deux équations (relatives au second dioptré),

$$-\frac{k_2 \left(\frac{n_1}{\gamma_2} - n_2 \right) \left(\frac{1}{\gamma_2} - 1 \right)}{(n_2 - n_1) k_2 \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_2} \right)} \left(\frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn_2}{n_2} \right)$$

le dénominateur après substitution et multiplication par $\Gamma \Gamma'$ devient $K \times (\Gamma - \Gamma')$ comme celui du premier dioptré, et l'addition produit alors au numérateur, une forme qui ne diffère de $a_0 \frac{dn_0}{n_0} + a_1 \frac{dn_1}{n_1} + a_2 \frac{dn_2}{n_2}$ que par l'introduction d'un Γ' à la place d'un Γ ; au lieu d'une expression du deuxième degré en Γ on aura une forme homographique en Γ' , Γ ; les termes des degrés 2 et 0 auront nécessairement mêmes coefficients dans les deux formules, et, finalement, on obtiendra par éliminations successives, en employant les notations $u, u', dx_0, dx'_0, h, h', dx, dx'$: $\gamma_0 = \frac{u'}{u} = \frac{nH}{n'H'}$, $\gamma = \frac{nh}{n'h'}$

$$\frac{du}{u} - \frac{du'}{u'} = - \frac{(L\gamma_0\gamma + M'\gamma_0 + M''\gamma + N) d\lambda}{k(\gamma_0 - \gamma)} + \frac{ndx_0 - \gamma\gamma_0 n' dx'_0}{k(\gamma_0 - \gamma)}$$

$$\frac{dh}{h} - \frac{dh'}{h'} = - \frac{(L\gamma_0\gamma + M'\gamma_0 + M''\gamma + N) d\lambda}{k(\gamma_0 - \gamma)} + \frac{ndx - \gamma\gamma_0 n' dx'}{k(\gamma_0 - \gamma)}.$$

La forme homographique devant se réduire à celle du deuxième degré quand on fait $\gamma = \gamma_0$, on a $M' + M'' = M$.

On peut enfin éliminer $n'dx'_0$ et $n'dx'$ par les formules (23')

$$ndx_0 - \gamma_0^2 n' dx'_0 = (L\gamma_0^2 + M\gamma_0 + N) d\lambda$$

$$ndx - \gamma^2 n' dx' = (L\gamma^2 + M\gamma + N) d\lambda$$

et on obtient les remarquables résultats suivants :

$$\frac{du}{u} - \frac{du'}{u'} = - \frac{1}{k} \left(M' + \frac{N}{\gamma_0} \right) d\lambda + \frac{ndx_0}{k\gamma_0}$$

$$\frac{dh}{h} - \frac{dh'}{h'} = \frac{1}{k} \left(M'' + \frac{N}{\gamma} \right) d\lambda - \frac{ndx}{k\gamma}; \quad \frac{dH}{H} - \frac{dH'}{H'} = \frac{1}{k} \left(M' + \frac{N}{\gamma_0} \right) d\lambda - \frac{ndx_0}{k\gamma_0}.$$

En dehors des constantes, le chromatisme angulaire ne dépend que des points où les rayons incidents rencontrent l'axe, et le chromatisme latéral ne dépend que des points conjugués, pieds des éléments linéaires, objets, normaux à l'axe.

L'équation (24) va nous permettre de déterminer M' et M'' ; au point γ_0 on a :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{H} - \frac{dH'}{H'} + \frac{du}{u} - \frac{du'}{u'} &= \frac{1}{k} (M'' - M') d\lambda = -\frac{dn}{n} + \frac{dn'}{n'} \\ M'' + M' &= M \quad M'' - M' = -k \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{d\lambda} - \frac{1}{n'} \frac{dn'}{d\lambda} \right) \\ M'' &= \frac{M}{2} - \frac{k}{2} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{d\lambda} - \frac{1}{n'} \frac{dn'}{d\lambda} \right) \quad M' = \frac{M}{2} + \frac{k}{2} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{d\lambda} - \frac{1}{n'} \frac{dn'}{d\lambda} \right) \end{aligned}$$

et les trois équations

$$(23') \quad ndx_0 - \gamma_0^2 n' dx'_0 = (L\gamma_0^2 + M\gamma_0 + N) d\lambda$$

$$(25) \quad \frac{du}{u} - \frac{du'}{u'} = -\frac{1}{k} \left[\frac{M}{2} + \frac{k}{2} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{d\lambda} - \frac{1}{n'} \frac{dn'}{d\lambda} \right) + \frac{N}{\gamma_0} \right] d\lambda + \frac{ndx_0}{k\gamma_0}$$

$$(26) \quad \frac{dH}{H} - \frac{dH'}{H'} = \frac{1}{k} \left[\frac{M}{2} - \frac{k}{2} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{d\lambda} - \frac{1}{n'} \frac{dn'}{d\lambda} \right) + \frac{N}{\gamma_0} \right] d\lambda - \frac{ndx_0}{k\gamma_0}$$

permettent de résoudre au moyen des quantités L, M, N tous les problèmes d'achromatisme de l'approximation de Gauss.

Je signalerai en particulier que si les milieux extrêmes sont les mêmes, et si on a les deux conditions : $\gamma_0 = -\frac{M}{2L} = -\frac{2N}{M}$.

1° γ_0 est racine double de $C = 0$, les deux points achromatiques sont confondus au point γ_0 .

2° L'achromatisme latéral est réalisé pour un objet linéaire placé en ce point.

3° Si on diaphragme le système au point γ_0 , les images d'un même objet auront leurs sommets distribués sur une courbe dont la tangente moyenne passera par le centre du diaphragme; il y aura achromatisme apparent pour l'œil placé au point γ_0 .

Dans le cas général, on voit qu'il n'existe qu'un seul point jouissant de l'achromatisme latéral, et un seul point possédant l'achromatisme angulaire; ces deux points sont confondus si les milieux extrêmes sont les mêmes.

On conçoit sans peine que ces points uniques ne pourront être employés utilement que s'ils coïncident avec un des points achromatiques axiaux, ce qui nous ramène au cas de la racine double.

Application.

Nous appliquerons la méthode précédente à un système de deux lentilles, mais pour rendre les calculs plus symétriques nous remplacerons les rapports de convergence par des quotients de petits angles. Calculons d'abord la fonction de chromatisme d'une lentille d'épaisseur e , d'indice n et de rayons R et R_1 :

$\frac{1}{k} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)$; $\frac{1}{k_1} = \frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$; on a dès lors avec une notation évidente

$$u^2 dx - u_1^2 n dx_1 = \frac{k(u - u_1)(u - nu_1)}{n - 1} \left(-\frac{dn}{n} \right)$$

et

$$u_1^2 n dx_1 - u_2^2 dx_2 = \frac{k_1(u_1 - u_2)(nu_1 - u_2)}{1 - n} \frac{dn}{n}$$

$$u^2 dx - u_2^2 dx_2$$

$$= -\frac{dn}{(n-1)} [k(u - u_1)(u - nu_1) + k_1(u_1 - u_2)(nu_1 - u_2)]$$

K étant la constante de la lentille (longueur focale)

on a (15')

$$\frac{u}{K} = \frac{u_2}{k} + \frac{u}{k_1}$$

mais (17)

$$\frac{1}{nK} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_1} + \frac{e}{kk_1}$$

ou en posant

$$\frac{K}{k} = p, \quad \frac{K}{k_1} = p_1, \quad \frac{K}{e} = \gamma, \quad u_1 = pu_2 + p_1 u, \quad \frac{1}{n} = p + p_1 + \frac{pp_1}{\gamma}$$

l'élimination de u_1 donne :

$$= -\frac{Kdn}{n-1} \left[(u - u_2)^2 + \frac{u^2 p_1 (1 - p_1) + u_2^2 p (1 - p) - 2pp_1 uu_2}{\gamma} \right]$$

Si l'on considère une deuxième lentille dont les constantes seront affectées du signe ', on aura

$$= -\frac{K'dn'}{n'-1} \left[(u_2 - u')^2 + \frac{u_2^2 p' (1 - p') + u'^2 p'_1 (1 - p'_1) - 2 p' p'_1 u_2 u'}{\eta'} \right]$$

où $\frac{1}{n'} = p' + p'_1 + \frac{p' p'_1}{\eta'}$, $\frac{K'}{k'} = p'$, $\frac{K'}{k'_1} = p'_1$, $\frac{K'}{e'} = \eta'$;

si on écrit $\frac{dn}{n-1} = \frac{1}{v}$, $\frac{dn'}{n'-1} = \frac{1}{v'}$ on a :

$$u^2 dx - u'^2 dx' = - \left\{ \frac{K}{v} \left[(u - u_2)^2 - \frac{u_2^2 p (p - 1) + u^2 p_1 (p_1 - 1) + 2 p p_1 u u_2}{\eta} \right] + \frac{K'}{v'} \left[(u_2 - u')^2 - \frac{u'^2 p' (p' - 1) + u_2^2 p'_1 (p'_1 - 1) + 2 p' p'_1 u_2 u'}{\eta'} \right] \right\}.$$

Désignons par E la distance du plan principal image de L au plan principal objet de L', et par K la constante du système total on a :

$$\frac{u_2}{K} = \frac{u}{K'} + \frac{u'}{K} \quad \text{et} \quad \frac{1}{K} = \frac{1}{K} + \frac{1}{K'} + \frac{E}{KK'}$$

si $\frac{J_i}{K} = P$, $\frac{J_i}{K'} = P'$, $\frac{J_i}{E} = \mathcal{E}$, $u_2 = P'u + Pu'$, $1 = P + P' + \frac{PP'}{\mathcal{E}}$

Il resterait à substituer la valeur de u_2 ; les conditions d'achromatisme seraient obtenues en écrivant que les coefficients de u^2 , uu' , u'^2 sont nuls; mais il est plus simple d'écrire que le second membre est nul pour 3 valeurs du rapport de convergence; il suffira de faire successivement

$u_2 = 0$ $u = 0$ $u' = 0$; on obtient pour ($u_2 = 0$)

$$(25) \quad \frac{P}{v} \left(1 - \frac{p_1 (p_1 - 1)}{\eta} \right) + \frac{P'}{v'} \left(1 - \frac{p' (p' - 1)}{\eta'} \right) = 0$$

($u = 0$) $\frac{P'}{v} \left(1 - \frac{p (p - 1)}{\eta} \right) + \frac{P}{v'} \left(1 - \frac{p'_1 (p'_1 - 1)}{\eta'} \right)$

$$= \frac{2}{v} \left(1 + \frac{p' p'_1}{\eta'} \right) - \frac{1}{P v'} \left(1 - \frac{p' (p' - 1)}{\eta'} \right)$$

($u' = 0$) $\frac{P'}{v} \left(1 - \frac{p (p - 1)}{\eta} \right) + \frac{P}{v'} \left(1 - \frac{p'_1 (p'_1 - 1)}{\eta'} \right)$

$$= \frac{2}{v} \left(1 + \frac{p p_1}{\eta} \right) - \frac{1}{P' v} \left(1 - \frac{p_1 (p_1 - 1)}{\eta} \right).$$

Ces deux premiers membres étant égaux, on tirera facilement $\frac{1}{P}$ et $\frac{1}{P'}$ des formules

$$(25) \quad \frac{1}{P_{v'}} \left(1 - \frac{p'(p'-1)}{\eta'} \right) = - \frac{1}{P_v} \left(1 - \frac{p_1(p_1-1)}{\eta} \right) \\ = \frac{1}{v'} \left(1 + \frac{p'p'_1}{\eta'} \right) - \frac{1}{v} \left(1 + \frac{pp_1}{\eta} \right)$$

l'addition nous donne

$$\frac{P'}{v} \left(1 - \frac{p(p-1)}{\eta} \right) + \frac{P}{v'} \left(1 - \frac{p'_1(p'_1-1)}{\eta'} \right) \\ = \frac{1}{v'} \left(1 + \frac{p'p'_1}{\eta} \right) + \frac{1}{v} \left(1 + \frac{pp_1}{\eta} \right).$$

Si on substitue dans la dernière équation, les valeurs de P et de P', on aura la relation indépendante de E, qui doit lier les constantes des deux lentilles, pour qu'il puisse y avoir achromatisme.

Remarquons que pour $e = 0$, $e' = 0$ ces conditions, en général incompatibles se réduisent à l'unique condition classique, si $P + P' = 1$; c'est-à-dire que : *deux lentilles infiniment minces ne peuvent former un système achromatique, si elles ne sont pas accolées.*

La substitution conduit à

$$\frac{1}{v'^2} \frac{1 - p' - p'_1}{\eta'} \left(p' + p'_1 + \frac{p'p'_1}{\eta'} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{1 - p - p_1}{\eta} \left(p + p_1 + \frac{pp_1}{\eta} \right)$$

et comme les parenthèses valent respectivement $\frac{1}{n'}$ et $\frac{1}{n}$, on obtient la relation remarquablement simple

$$\frac{1}{n'v'^2\eta'} (1 - p' - p'_1) = \frac{1}{nv^2\eta} (1 - p - p_1).$$

Si l'on introduit les constantes k et les épaisseurs, on obtient cette condition sous la forme

$$(26) \quad \frac{e}{e'} = \frac{n v^2}{n' v'^2} \frac{(n' - 1) \left(\frac{1}{k'} + \frac{1}{k'_1} \right) + \frac{n'e'}{k'k'_1}}{(n - 1) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k_1} \right) + \frac{ne}{kk_1}} \text{ ou } \frac{e \frac{(n-1)^2}{n^2 v^2}}{e' \frac{(n'-1)^2}{n'^2 v'^2}} = \frac{\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'} - \frac{e'}{R'R'_1}}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} - \frac{e}{RR_1}}$$

De là on peut tirer une première conclusion : si les deux lentilles sont minces, la condition (25) exige que $\frac{1}{k'} + \frac{1}{k'_1}$ et $\frac{1}{k} + \frac{1}{k_1}$ soient de signes contraires : dès lors e et e' étant petits doivent être de signe contraire, ce qui est impossible, e et e' étant essentiellement positifs, d'où cette proposition : *deux lentilles minces, accolées ou non, ne peuvent jamais former un système rigoureusement achromatique*; on n'aura qu'un achromatisme pratique.

La condition (26) satisfaite pour $e = 0$ $e' = 0$, l'est également pour $e = R - R_1$ et $e' = R' - R'_1$ c'est-à-dire si les faces, dans chaque lentille, sont concentriques; on peut chercher à réaliser un système achromatique avec de telles lentilles, et on arrive à une assez curieuse solution.

Il faut remarquer d'abord que les relations se simplifient notablement; en effet, la formule (17''), dans laquelle on fait $e = 0$ (puisque les points nodaux coïncident), nous donne :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_1} \quad \frac{1}{K'} = \frac{1}{k'} + \frac{1}{k'_1} \quad p + p_1 = 1 \quad p' + p'_1 = 1$$

$$u^2 dx - u'^2 dx' = - \left[\frac{K}{v} (u - u_2)^2 \left(1 + \frac{pp_1}{r_1} \right) + \frac{K'}{v'} (u_2 - u')^2 \left(1 + \frac{p'p'_1}{r'_1} \right) \right]$$

et les trois conditions d'achromatisme deviennent

$$\frac{P}{v} \left(1 + \frac{pp_1}{r_1} \right) + \frac{P'}{v'} \left(1 + \frac{p'p'_1}{r'_1} \right) = 0$$

$$\frac{P}{v} \left(1 + \frac{pp_1}{r_1} \right) + \frac{(P-1)^2}{P'v'} \left(1 + \frac{p'p'_1}{r'_1} \right) = 0$$

$$\frac{(P'-1)^2}{Pv} \left(1 + \frac{pp_1}{r_1} \right) + \frac{P'}{v'} \left(1 + \frac{p'p'_1}{r'_1} \right) = 0$$

ces trois équations ne sont compatibles que si $P + P' = 1$, condition qui exige que les points nodaux coïncident. Les quatre surfaces doivent être, dès lors, concentriques.

Si on transforme la condition unique d'achromatisme ainsi trouvée, elle devient :

$$(27) \quad \frac{(n-1)}{n^2 v} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) + \frac{(n'-1)}{n'^2 v'} \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'} \right) = 0.$$

Cette condition est facile à établir directement en remarquant que

$$\frac{1}{\mathcal{K}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k'} + \frac{1}{k'_1} = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) + \frac{n'-1}{n'} \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'} \right),$$

et en écrivant que la différentielle est nulle.

Pour se faire une idée des solutions possibles, supposons la première lentille en flint $n = 1,6$, $\nu = 40$, la deuxième en crown $n' = 1,5$, $\nu' = 60$; supposons $R = -R'_1$ et $R_1 = R'$, on obtient

$$\frac{R - R_1}{17,06} = \frac{R + R_1}{27} = \frac{2R}{44,06} = \frac{2R_1}{9,94}.$$

Le système pourra être composé : 1° d'une lentille en flint de rayons 4^{cm}406, 0^{cm}994 et d'épaisseur 3^{cm}412, complétée par deux demi-boules en crown, la première s'insérant exactement dans la cavité de la lentille en flint, la deuxième collée sur le plan, le tout formant une sphère achromatique dont le foyer est à 6^{cm}8 du centre (*fig. 8*).

Si on pouvait travailler une cavité hémisphérique de rayon encore plus petit, on aurait un système d'ouverture énorme, où la petite demi-boule servirait de diaphragme.

Il reste, en se donnant $\mathcal{K}$, deux paramètres utilisables pour la correction des aberrations géométriques.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE IV

Théorie des systèmes centrés. Deuxième approximation.

L'approximation de Gauss, limitée aux rayons et aux pinceaux de faible ouverture, faisant avec l'axe du système centré des angles assez petits pour qu'on puisse négliger la seconde puissance de ces inclinaisons, fait correspondre à un point objet, voisin de l'axe, une image ponctuelle quasi-stigmatique.

ABERRATION AXIALE. — Dans la deuxième approximation, nous nous occuperons tout d'abord de faisceaux dont l'axe demeure le rayon moyen, mais dont l'ouverture mesurée par le demi-angle au sommet u , devient telle que u^2 n'est plus négligeable. Dans l'espace image, le faisceau conjugué d'un point objet est enveloppé par une caustique de révolution autour de l'axe; le sommet de cette caustique, qui n'est autre que le point conjugué de Gauss, est à une distance ϵ' du point où se coupent les rayons les plus écartés de l'axe; si u' est l'inclinaison de ces derniers rayons, on écrira, suivant la notation de Abbe, $\epsilon' = a'u'^2$, ϵ' qu'on appelle l'aberration longitudinale, et que nous nommerons plus volontiers l'aberration axiale, ne changeant pas quand on change le signe de u' ; on regardera a' comme une constante finie, dépendant de la position du point objet, qui déterminera l'aberration.

Si le pinceau de l'espace objet a subi des réfractions antérieures,

$\varepsilon = au^2$ représentera l'aberration dans l'espace objet et a' aura une valeur variable avec a .

Nous nous proposerons de trouver une relation liant a et a' pour chaque point de l'axe, c'est-à-dire en fonction d'une variable déterminant la position du couple de points conjugués de Gauss; nous choisirons comme variable le rapport de convergence.

Fonction d'aberration.

Les droites conjuguées $AX, A'X'$ (*fig. 9*), peuvent être regardées comme fixes, tout en faisant partie de faisceaux de rayons déformables, la déformation étant obtenue par une variation de a qui entraîne une modification corrélative de a' ; la caustique ayant son sommet au point A_0 , est tangente, en T_0 , à AX , la caustique de l'espace image aura son sommet en A'_0 , et son point de contact avec $A'X'$ en T'_0 ; si A_0 vient en A_1 , T_0 vient en T_1 , A'_0 en A'_1 , T'_0 en T'_1 ; mais $A_0A'_0$ d'une part, $A_1A'_1$ de l'autre sont des points conjugués de Gauss et le rapport $A_0A'_1 : A_0A_1$ est le grossissement longitudinal, on a donc :

$$\overline{nA_0A_1} : n'\overline{A'_0A'_1} = \gamma_0^2.$$

γ_0 étant le rapport de convergence aux points A_0, A'_0

mais $A_0A = \varepsilon = au^2$, $A'_0A' = \varepsilon' = a'u'^2$, dès lors

$$A_0A_1 = -d\varepsilon = -u^2da, \quad A'_0A'_1 = -d\varepsilon' = -u'^2da', \quad \text{d'où}$$

$$u^2 \left(nda - \gamma_0^2 \frac{u'^2}{u^2} n'da' \right) = 0.$$

Or $\frac{u'}{u}$ ne diffère de γ_0 que d'une quantité du deuxième ordre, on peut donc écrire :

$$nda - \gamma_0^4 n'da' = 0$$

γ_0 devant être regardé comme une constante, nous aurons :

$$na - n'a'\gamma_0^4 = \frac{P}{2} = \rho(\gamma_0)$$

la constante $\frac{P}{2}$ dépend uniquement des caractéristiques du système et de la position des points conjugués.

a et a' ne peuvent devenir infinis que dans deux cas particuliers : si le point image est au voisinage du 2^e foyer $u = 0$, γ_0 est infini; au^2 peut être infini; si le point objet est au voisinage du foyer objet $\gamma_0 = 0$, $u' = 0$, $a'u'^2$ peut être infini, on éliminera ces deux cas, en supposant que les rayons qui constituent, soit le faisceau incident, soit le faisceau émergent, sont rigoureusement parallèles à l'axe, c'est-à-dire que : 1^o pour γ_0 infini $a = 0$, et 2^o pour $\gamma = 0$ $a' = 0$.

Cette dernière condition exige que $\rho(\gamma_0)$ contienne γ_0 avec, seulement, des exposants positifs ou nuls, et la première que $\rho(\gamma_0) : \gamma_0^4$ ne présente que des exposants négatifs ou nuls, puisque a' dans le premier cas et a dans le second sont nécessairement finis.

On aura donc :

$$2na - 2n'a'\gamma_0^4 = P = P_4\gamma_0^4 + P_3\gamma_0^3 + P_2\gamma_0^2 + P_1\gamma_0 + P_0.$$

La connaissance des cinq constantes ainsi introduites permettra le calcul de l'aberration en un point quelconque du système centré, pour lequel aura été effectuée la détermination, soit par l'expérience, soit par le calcul, de ces cinq coefficients.

L'équation $P = 0$ aura quatre racines qui annuleront l'aberration, ou plutôt qui rendront nul le terme du 2^e ordre; nous pourrions appeler *points stigmatiques* les points tels que l'aberration y est du quatrième ordre par rapport à l'inclinaison, en réservant le nom de *points stigmatiques parfaits* à ceux qui présentent une aberration rigoureusement nulle, quelle que soit l'inclinaison des rayons.

On pourra donc énoncer la proposition suivante :

Dans un système centré quelconque, il peut y avoir au plus quatre points stigmatiques; le système peut donc en présenter 4, 2 ou 0.

La fonction P résout complètement le problème de l'aberration en deuxième approximation, nous la nommerons fonction d'aberration.

Coma, Astigmatisme, inégale dilatation.

En deuxième approximation, on doit encore étudier les pinceaux de faible ouverture, comparables à ceux de l'approximation de Gauss, mais formés autour d'un rayon moyen faisant avec l'axe, qu'il rencontre, des angles petits, assez notables cependant pour

que les secondes puissances de l'inclinaison ne puissent plus être négligées.

On sait que de tels pinceaux ont une constitution bien différente de celle des pinceaux axiaux; au lieu d'une symétrie parfaite par rapport à l'axe, les surfaces caustiques ne présentent plus qu'une symétrie, par rapport au plan de section principale dans lequel se réfracte le rayon moyen; l'une des nappes Σ_1 comprenant deux morceaux de surface, symétriques par rapport à cette section principale, et se raccordant tangentielllement tout le long d'une ligne tracée dans la section, tandis que l'autre nappe Σ_2 , qui admet la section principale pour plan de symétrie, rencontre normalement cette section.

Il résulte de cette constitution du pinceau, trois défauts de l'image d'un point.

1^o COMA. — Les apparences compliquées en aigrettes, comètes, ou virgules, que prend la trace du faisceau émergent, sur un plan qui le rencontre non loin des focales, tiennent à la dissymétrie de la caustique et constituent le *coma*; pour un faisceau très délié, l'élément d'image qu'il fournit est d'autant plus médiocre qu'il diffère davantage d'un cercle; s'il n'y a pas coma, c'est-à-dire si la caustique présente, au moins approximativement, deux plans de symétrie, le pinceau fournira entre les deux focales une pseudo-image à peu près circulaire qui pourra constituer un élément d'image suffisant.

2^o ASTIGMATISME. — Les deux focales du pinceau situées aux points de contact du rayon moyen et des nappes Σ_1 , Σ_2 de la caustique, sont séparées par une distance η' qui constitue l'astigmatisme; s'il n'y a pas coma, on dira que l'astigmatisme est vrai ou normal; on conçoit que la suppression de l'astigmatisme permettra d'obtenir l'image ponctuelle d'un point objet, mais si le pinceau est dissymétrique, cette image sera affectée de coma, et pourra n'être qu'un assez médiocre élément de reproduction de l'objet.

3^o INÉGALE DILATATION. DISTORSION. — Tandis que pour le pinceau axial, la dilatation mesurée par le rapport de convergence est la même dans tous les azimuts, nous avons dû, pour les directions inclinées sur l'axe, considérer deux rapports de convergence dis-

tinets, γ_i dans la section principale, γ_s perpendiculairement à cette section; ces rapports correspondent à des dilatations inégales d'un pinceau initial, supposé de révolution autour du rayon moyen; la section du pinceau de l'espace image, en dehors et loin des focales, devient elliptique; aux dilatations inégales correspondent des grandsissements inégaux aisément mesurables dans la région des focales; d'où les phénomènes dits de *distorsion* que présentent les quadrillages réguliers. La différence $(\gamma_s - \gamma_i)$, ne s'annulera qu'aux points où le pinceau étant également dilaté dans les deux plans perpendiculaires, un pinceau initial formant un cône circulaire donnera naissance à un pinceau émergent dont la section, loin des focales, sera approximativement un cercle.

Les points sans coma seront dits points de Fermat (¹); les points sans astigmatisme seront les points de Petzval; si un point est à la fois de Petzval et de Fermat, il sera quasi-stigmatique.

Nous ne donnerons pas de nom particulier aux points d'égale dilatation, beaucoup moins importants.

Fonction de coma.

Le coma pourra être représenté par une quantité, ou une fonction, liée à la dissymétrie du pinceau; nous choisirons d'abord, l'aberration longitudinale; soit T_1 (fig. 9^{bis}), le point de contact du rayon moyen du pinceau, avec la nappé de la caustique normale au plan de la section principale; dans la même section, un rayon faisant un angle δu avec le rayon moyen rencontre en T ce rayon, T_1T sera l'aberration longitudinale; les deux rayons considérés demeurant fixes, imaginons que le faisceau incident se déforme de façon que le point de contact avec la caustique devienne T_2 ; dans l'espace image les deux points de contact avec la caustique du pinceau émergent sont respectivement T'_2 , T'_1 , et le point fixe T' correspond à l'intersection T des deux rayons fixes; les points T_2 , T'_2 et T_1 , T'_1 sont des focales tangentielles deux à deux conjuguées, de telle sorte que

$$nT_1T_2 : n'T'_1T'_2 = \gamma_i^2,$$

γ_i étant le rapport de convergence tangentiel.

(¹) Le principe de Fermat s'applique en ces points jusqu'aux termes du 3^e ordre inclusivement.

Mais T_1T , T'_1T' s'annulent pour $\delta u = 0$ on peut donc poser $T_1T = m\delta u + p\delta u^2 + \dots$ de plus par raison de symétrie T_1T ne doit pas changer, si on change à la fois le signe de u et celui de δu ; m est donc une fonction impaire de u tandis que p est une fonction paire; en deuxième approximation nous poserons $m = 3\varphi u$ où φ est une constante et nous regarderons p comme une constante;

$$\begin{aligned} \text{on aura} \quad T_2T_1 &= 3u\delta u\Delta\varphi + \Delta p\delta u^2 \\ \text{de même} \quad T'_2T'_1 &= 3u'\delta u'\Delta\varphi' + \Delta p'\delta u'^2 \\ \text{dès lors} \quad n(3\Delta p u\delta u + \Delta p\delta u^2) - n'\gamma_i^2(3\Delta\varphi'u'\delta u' + \Delta p'\delta u'^2) &= 0 \\ \text{ou} \quad \frac{3}{2}u\delta u(2n\Delta\varphi - 2n'\gamma_0\gamma_i^3\Delta\varphi') + \frac{\delta u^2}{2}(2n\Delta p - 2n'\gamma_i^4\Delta p') &= 0. \end{aligned}$$

Pour des valeurs un peu notables de u , les termes en $u\delta u$, $u'\delta u'$ qui correspondent à la dissymétrie et au coma, sont seuls importants; l'équation devient pour ces termes :

$$2n\Delta\varphi - 2n'\Delta\varphi'\gamma_0\gamma_i^3 = 0;$$

γ_i ne différant de sa limite γ sur l'axe, que d'une quantité du 2^e ordre, nous écrirons

$$2n\Delta\varphi - 2n'\Delta\varphi'\gamma_0\gamma^3 = 0 \text{ et } 2n\varphi - 2n'\varphi'\gamma_0\gamma^3 = \Phi$$

Φ étant uniquement fonction des constantes et de γ_0 , γ ; nous pourrons, comme pour l'aberration axiale, éliminer les cas particuliers où l'aberration peut devenir infinie, et la condition que φ et φ' soient des quantités finies dans tous les autres cas exige que Φ soit une fonction du 3^e degré en γ et du 1^{er} degré en γ_0

$$\begin{aligned} \Phi &= D\gamma^3 + E\gamma^2 + F\gamma + G \\ D &= D_1\gamma_0 + D_0 \quad E = E_1\gamma_0 + E_0 \quad F = F_1\gamma_0 + F_0 \quad G = G_1\gamma_0 + G_0 \end{aligned}$$

Φ que nous appellerons la fonction de coma, contient donc huit coefficients à déterminer par le calcul ou par l'expérience, et cette fonction étant ainsi connue, on pourra connaître le coma sur toutes les directions rencontrant l'axe en des points quelconques.

Avec une valeur donnée de γ_0 , la fonction Φ s'annule pour 3 valeurs, réelles ou imaginaires, de γ : il peut y avoir sur toute direction rencontrant l'axe trois points sans coma ou points de Fernal, et il y en a nécessairement un.

Pour une valeur donnée de γ , Φ ne s'annule que pour une seule valeur de γ_0 : *il y a une seule position d'un diaphragme dont la petite ouverture, centrée sur l'axe, détermine, en un point donné de l'axe, une surface lieu de points sans coma, ou surface de Fermat.*

Fonction d'astigmatisme.

Sur le rayon moyen AT_1 (*fig. 9^{ter}*) d'un pinceau incident qui rencontre l'axe en A, les deux focales T_1, S_1 sont séparées par une distance η , tandis que sur $A'T'_1, S'_1T'_1 = \eta'$; or ces distances sont, par raison de symétrie, les mêmes sur les rayons symétriques de $AT_1, A'T'_1$ par rapport à l'axe, on peut donc poser

$$\eta = 2\alpha u^2 \quad \eta' = 2\alpha' u'^2$$

α, α' étant des constantes qui ne dépendent que de la position du rayon et de la position du point sur ce rayon; nous pouvons, ici, déformer le faisceau initial, de façon que les focales sagittales S_1, S'_1 viennent respectivement en S_2, S'_2 cette déformation pouvant porter en T_2, T'_2 les focales tangentielle, nous aurons,

$$n\overline{T_1T_2} - n'\overline{T'_1T'_2}\gamma^2 = 0 \quad n\overline{S_1S_2} - n'\overline{S'_1S'_2}\gamma'^2 = 0$$

par soustraction,

$$2ndxu^2 - 2n'dx'u'^2\gamma'^2 = 0 \\ u^2(2ndx - 2n'dx'\gamma_0^2\gamma^2) = 0$$

la substitution de γ_0 à $\frac{u'}{u}$ et de γ à γ_0, γ_0' , n'introduisant que des quantités du 2^e ordre; on en tire :

$$2n\alpha - 2n'\alpha'\gamma_0^2\gamma^2 = f(\gamma\gamma_0) = Q$$

mais ici encore, α et α' peuvent toujours être choisis finis ou nuls; Q étant fini pour $\gamma_0 = 0$ ou $\gamma = 0$, $\frac{Q}{\gamma^2}, \frac{Q}{\gamma_0^2}$ étant finis le premier pour γ infini, le second pour γ_0 infini, la fonction Q est donc nécessairement une forme du quatrième degré ne présentant que des termes du second degré en γ ou γ_0

$$Q = A\gamma^2 + B\gamma + C \\ A = A_2\gamma_0^2 + A_1\gamma_0 + A_0 \\ B = B_2\gamma_0^2 + B_1\gamma_0 + B_0 \\ C = C_2\gamma_0^2 + C_1\gamma_0 + C_0$$

La fonction d'astigmatisme Q contient 9 coefficients constants, déterminables, soit par le calcul, soit par l'expérience, grâce auxquels l'astigmatisme sera connu en un point quelconque d'une direction quelconque rencontrant l'axe.

Pour une valeur donnée de γ_0 , Q s'annule pour deux valeurs de γ , et on retrouve cette propriété des divisions homographiques, de même base, d'avoir deux points communs (réels ou imaginaires) : *Sur une direction donnée rencontrant l'axe il peut y avoir deux points sans astigmatisme ou points de Petzval* ; il y en a deux ou zéro.

Si on se donne une valeur de γ , Q s'annule pour deux valeurs de γ_0 (réelles ou imaginaires) ; il existe deux ou zéro positions d'un diaphragme dont la petite ouverture, centrée sur l'axe, détermine en un point donné de l'axe, une surface lieu des points sans astigmatisme, ou surface de Petzval.

La fonction d'aberration P contient cinq coefficients, la fonction de coma Φ , huit et la fonction d'astigmatisme Q neuf coefficients, au total 22 coefficients ; nous laissons de côté pour l'instant l'inégale dilatation ou la distorsion qui n'introduit pas de coefficients nouveaux, pour nous préoccuper de ramener la connaissance complète du système centré à un nombre moindre de paramètres ; ces paramètres définitifs seront au nombre de cinq.

Nous allons tout d'abord chercher le coma et l'astigmatisme sur l'axe.

Astigmatisme et coma sur l'axe.

Le rayon AT (fig. 9^{ter}) est tangent à la caustique de sommet A_0 , au point T_0 , le rayon infiniment voisin BT , tangent à la même caustique au point θ ; $TAB = u$, $ATB = \delta u$; T_0T représente le coma du pinceau de rayon moyen AT ; AT_0 distance des 2 focales, représente l'astigmatisme du même pinceau, sur l'axe.

Calculons AT_0 en prenant $A_0A = au^2 + bu^4 = \epsilon$

$$AT_0 = r_0 = \frac{d\epsilon}{du} \sin u = (2au + 4bu^3) \left(u - \frac{u^3}{6} \right) = 2au^2 + u^4 \left(4b - \frac{a}{3} \right)$$

1° Si on se limite au premier terme, on obtient cette proposition, *Aux termes du 4^e degré près, l'astigmatisme sur l'axe est double de l'aberration.*

Calculons $T_0T = AT - AT_0$

$$\frac{AT}{\sin(u + \delta u)} = \frac{BT}{\sin u} = \frac{AB}{\sin \delta u}, \quad A_0B = u(u + \delta u)^2$$

$$AT = AB \frac{\sin(u + \delta u)}{\sin \delta u} \left(\frac{\sin u}{\operatorname{tg} \delta u} + \cos u \right) \times (2au\delta u + a\delta u^2) = 2au^2 + 3au\delta u$$

$$T_0T = 3au\delta u; \text{ de même, } T'_0T' = 3a'u'\delta u'.$$

2° La fonction de coma qui a pour valeur générale $2n\varphi - \gamma_0\gamma^3 2n'\varphi'$, coefficient de $\frac{3u\delta u}{2}$, vaut ici : $2na - \gamma_0\gamma^3 2n'a' = 2na - \gamma_0^4 2n'a'$, puisque $\gamma = \gamma_0$; donc la fonction de coma, sur l'axe, se réduit à la fonction d'aberration.

Or, la fonction d'astigmatisme sur l'axe s'obtient en remplaçant dans $2n\alpha - \gamma_0^2\gamma^2 2n'\alpha'$; α par a , α' par a' et γ par γ_0 ; ce qui donne également $2na - \gamma_0^4 2n'a'$.

Dès lors, on a les identités suivantes :

$$P = Q_0 = \Phi_0.$$

Q_0 et Φ_0 représentant les fonctions d'astigmatisme et de coma dans lesquelles on fait $\gamma = \gamma_0$ d'où

$$(1) \quad P = A\gamma_0^3 + B\gamma_0 + C = D\gamma_0^3 + E\gamma_0^2 + F\gamma_0 + G.$$

Chacune des identités de deux fonctions du 4^e degré donne 5 relations entre les coefficients; d'où il suit que les 22 coefficients se réduisent à 12 paramètres distincts.

Mais on peut prévoir une autre diminution notable du nombre de paramètres; introduisons pour cela la notion de points de Petzval stabilisés.

Points de Petzval stabilisés.

En général l'équation $A\gamma^2 + B\gamma + C = 0$ donne, pour chaque valeur de γ_0 , deux valeurs de γ ; si on donne à γ_0 une variation $\delta\gamma_0$, il en résulte, pour l'une quelconque des valeurs de γ , une variation $\delta\gamma$ de même ordre; il pourra cependant arriver que $\delta\gamma$ soit du deuxième ordre, et, dans ce cas, sur un rayon infiniment voisin du premier, coupant celui-ci en T (point de Petzval stabilisé), les deux focales seront confondues au point T' comme sur le premier rayon; or, ceci n'est évidemment possible, que si la courbe caustique du

plan de la figure, relative à un pinceau comprenant les deux directions incidentes, présente en T' , un point de rebroussement, c'est-à-dire si le point T est aussi un point de Fermat.

On devra donc trouver la même condition, soit en exprimant que le point γ est un point de Petzval stabilisé, soit en écrivant qu'au point γ sont confondus, un point de Petzval et un point de Fermat.

Pour que le point γ soit un point de Petzval stabilisé, il faut et il suffit que les équations

$$(2) \quad A\gamma^2 + B\gamma + C = 0, \quad \left(A + \frac{dA}{d\gamma_0}\right)\gamma^2 + \left(B + \frac{dB}{d\gamma_0}\right)\gamma + \left(C + \frac{dC}{d\gamma_0}\right) = 0$$

aient une racine commune ⁽¹⁾; la condition bien connue sera une équation Z du 4^e degré en γ_0 ; *il n'existe donc, au plus, que quatre positions du diaphragme centré sur l'axe, telles que l'une des surfaces de Petzval soit stabilisée.*

Exprimons maintenant que le point γ est à la fois point de Petzval et point de Fermat; γ doit être racine commune de

$$A\gamma^2 + B\gamma + C = 0 \quad \text{et de} \quad D\gamma^3 + E\gamma^2 + F\gamma + G = 0$$

ou de la première, et de

$$D\gamma^3 + E\gamma^2 + F\gamma + G - (A\gamma^2 + B\gamma + C) = 0$$

mais cette dernière admet nécessairement la solution $\gamma = \gamma_0$; de telle sorte que si on tient compte des relations résultant de l'identité $Q_0 = \Phi_0$, elle devient

$$(D_1\gamma_0 + D_0)\gamma^2 + (B_2\gamma_0 + E_0 - A_0)\gamma + (C_2\gamma_0 + F_0 - B_0) = 0;$$

si on écrit la condition de racine commune avec l'une des deux autres, on obtient une nouvelle équation du 4^e degré en γ_0 qui doit avoir les mêmes solutions que la précédente, Z ; d'où 4 nouvelles relations entre les coefficients, ce qui abaisse à 8 le nombre des paramètres distincts.

Enfin, on peut chercher la condition pour que les deux surfaces

⁽¹⁾ Ce qui revient à exprimer que

$$\begin{aligned} & (2A_1\gamma_0 + A_1)\gamma^2 + (2B_1\gamma + B_1)\gamma + (2C_1\gamma_0 + C_1) = 0 \\ \text{et} \quad & (A_1\gamma_0 + 2A_0)\gamma^2 + (B_1\gamma_0 + 2B_0)\gamma + (C_1\gamma_0 + 2C_0) = 0 \end{aligned}$$

ont une racine commune.

de Petzval soient stabilisées à la fois; il faut et il suffit que les équations (2) aient deux racines communes; la proportionnalité des coefficients conduit aux deux conditions :

$$(3) \begin{cases} \gamma_0^2 (B_2C_1 - B_1C_2) + 2\gamma_0 (B_2C_0 - B_0C_2) + (B_1C_0 - B_0C_1) = 0 \\ \gamma_0^2 (A_2B_1 - A_1B_2) + 2\gamma_0 (A_2B_0 - A_0B_2) + (A_1B_0 - A_0B_1) = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations n'ayant pas nécessairement de racine commune, la stabilisation simultanée des deux surfaces de Petzval obtenues par une diaphragmation n'est pas, en général, possible; elle nécessitera une relation nouvelle, que l'on obtiendra en écrivant que les deux équations de condition ont une racine commune; cette relation peut se mettre sous la forme

$$(4) \quad (B_1^2 - 4B_2B_0) \begin{vmatrix} A_2A_1A_0 \\ B_2B_1B_0 \\ C_2C_1C_0 \end{vmatrix} = 0$$

$(B_1^2 - 4B_2B_0)$ est une solution étrangère introduite par le choix des deux équations de condition; cette condition est remplacée par une autre, si l'on fait un autre choix parmi les trois relations, dont deux seulement sont distinctes.

La condition qu'il faut conserver, c'est le déterminant égalé à 0; mais il est aisé de voir que c'est la condition pour que les deux équations aient *deux* racines communes; d'où cette proposition : *Si, pour une position du diaphragme, les deux surfaces de Petzval sont stabilisées à la fois, il existe nécessairement une autre position du diaphragme qui détermine aussi cette stabilisation simultanée; ces deux positions sont données par les racines de l'une des équations (3).*

Avant d'effectuer la réduction du nombre des coefficients des fonctions d'aberration et de coma, nous allons établir une propriété importante de ces fonctions.

Variation du chemin optique dans un plan de symétrie du pinceau.

Si, dans le plan de symétrie d'un pinceau, tel qu'une section principale d'un système centré, on considère deux directions de l'espace objet qui se coupent en un point O (*fig. 10*), elles donnent

naissance dans l'espace image à deux directions conjuguées qui se coupent au point O' ; soient $\delta u, \delta u'$, les angles supposés infiniment petits formés aux points O, O' ; si on évalue les longueurs optiques (OO') suivant les deux chemins cartésiens ainsi déterminés, la variation de la longueur optique, en passant d'un chemin à l'autre, est, en général, une quantité du troisième ordre.

Considérons deux surfaces d'onde, l'une de l'espace objet dont la section Σ , par le plan de symétrie, rencontre en AB les deux directions incidentes, l'autre de l'espace image qui sera coupée, par le plan de symétrie, suivant une courbe Σ' rencontrant les deux directions émergentes conjuguées en A', B' ; regardons OA comme un rayon fixe, tandis que OB , mobile enveloppe une ligne caustique tangente en T_1 à OA , en T_2 à OB ; désignons par Ω la longueur optique entre les deux surfaces d'onde; le chemin optique qui commence par OA , a pour longueur optique :

$$[OO']_A = n\overline{OA} + \Omega - n'\overline{O'A'}, \quad \text{de même}$$

$$[OO']_B = n\overline{OB} + \Omega - n'\overline{O'B'}$$

$$\text{la variation } \Delta = (OO')_B - (OO')_A = n(\overline{OB} - \overline{OA}) - n'(\overline{O'B'} - \overline{O'A'})$$

or, les caustiques étant respectivement les développées de Σ, Σ' :

$$-\overline{T_2B} + \overline{T_1A} = \text{arc } \overline{T_1T_2} \quad -\overline{T_2B'} + \overline{T_1A'} = \text{arc } \overline{T_1'T_2'}$$

mais

$$\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{OT_2} + \overline{T_2B} - \overline{T_1A} + \overline{T_1O} = \overline{T_1O} + \overline{OT_2} - \text{arc } \overline{T_1T_2}$$

$$\Delta = n(\overline{T_1O} + \overline{OT_2} - \text{arc } \overline{T_1T_2}) - n'(\overline{T_1'O'} + \overline{O'T_2'} - \text{arc } \overline{T_1'T_2'});$$

or, la différence entre un petit arc et le contour des tangentes à ses deux extrémités est, en général, du troisième ordre par rapport à l'arc; la variation de la longueur optique pourra donc être mise sous la forme :

$$\Delta = nH\delta u^3 - n'H'\delta u'^3$$

Nous pouvons exprimer cette longueur optique en fonction des constantes déjà introduites; posons $\delta u = v$, nous écrirons comme précédemment :

$$\overline{T_1O} = mv + pv^2 + m_1v^3 + p_1v^4 + \dots$$

et nous chercherons l'enveloppe de OB dont l'équation est

$$y = (x - \varepsilon) \operatorname{tg} v \quad (x - \varepsilon) = \frac{d\varepsilon}{dv} \sin v \cos v \quad y = \frac{d\varepsilon}{dv} \sin^2 v$$

$$x = 2mv + 3pv^2 + \left(4m_1 - \frac{2m}{3}\right) v^3 + \left(5p_1 - \frac{4p}{3}\right) v^4$$

$$y = mv^2 + 2pv^3 + \left(3m_1 - \frac{m}{3}\right) v^4$$

$$\text{mais } \overline{OT}_2 = \eta = \frac{x - \varepsilon}{\cos v} = \frac{d\varepsilon}{dv} \sin v$$

$$= mv + 2pv^2 + \left(3m_1 - \frac{m}{6}\right) v^3 + \left(4p_1 - \frac{p}{3}\right) v^4$$

$$\text{d'autre part } ds = dx \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)$$

$$\frac{ds}{dv} = 2m + 6pv + (12m_1 - m) v^2 + \left(20p_1 - \frac{7p}{3}\right) v^3$$

$$s = 2mv + 3pv^2 + \left(4m_1 - \frac{m}{3}\right) v^3 + \left(5p_1 - \frac{7p}{12}\right) v^4$$

$$\varepsilon + \eta - s = \frac{m}{6} v^3 + \frac{p}{4} v^4$$

la variation du chemin optique est donc

$$\Delta = \frac{nmv^3}{6} + \frac{npv^4}{4} - \frac{n'm'v^3}{6} - \frac{n'p'v^4}{4}$$

si on revient à la notation $v = \delta u$, et si on remplace m , fonction impaire de u , par $3\varphi u$, tandis qu'on limitera p , fonction paire de u , au terme constant

$$\Delta = \frac{u\delta u^3}{4} 2n\varphi + \frac{\delta u^4}{8} \times 2np - \frac{u'\delta u'^3}{4} 2n'\varphi' - \frac{\delta u'^4}{8} 2n'p'$$

ou, à l'approximation déjà envisagée,

$$\Delta = \frac{u\delta u^3}{4} (2n\varphi - \gamma_0 \gamma^3 2n'\varphi') + \frac{\delta u^4}{8} (2np - 2n'p'\gamma^4)$$

la variation de la longueur optique s'exprime donc au moyen de la fonction de coma au point γ et de la fonction d'aberration au

même point; si on ramène le point O sur l'axe en faisant $u = 0$, la variation Δ devient du quatrième ordre en δu

$$\Delta = \frac{\delta u^4}{8} P_\gamma.$$

Si on peut mettre la variation de la longueur optique entre deux points (γ) d'une même section principale sous la forme

$$(5) \quad \Delta = \Phi u \frac{\delta u^3}{4} + P_\gamma \frac{\delta u^4}{8}$$

Φ sera la valeur de la fonction de coma et P_γ celle de la fonction d'aberration au point γ .

Si, sans changer l'inclinaison, on se rapproche de l'axe, γ devient γ_0 , Φ et P_γ tendent vers P_{γ_0} et

$$\Delta = P_{\gamma_0} \frac{u \delta u^3}{4} + P_{\gamma_0} \frac{\delta u^4}{8}.$$

À partir de l'axe et pour une petite inclinaison u la variation du chemin optique est

$$\Delta = P \frac{u^4}{8}.$$

Si, dans le calcul de Δ on trouve P sous la forme Hu^2du^4 , sans terme indépendant de u , on devra en conclure que la fonction d'aberration est nulle au point γ ; ce point est stigmatique, l'aberration est du 4^e ordre.

Inégale Dilatation.

Formes approchées des équations des focales.

Les équations

$$\frac{\sin u'}{\sin u} \times \frac{1}{ns} - \frac{\sin u}{\sin u'} \times \frac{1}{n's'} = \frac{1}{k_s}$$

$$\frac{du'}{du} \times \frac{1}{nt} - \frac{du}{du'} \times \frac{1}{n't'} = \frac{1}{k_t}$$

peuvent recevoir des formes plus immédiatement utilisables, par l'introduction des hypothèses qui constituent la deuxième approximation.

1° FORMES APPROCHÉES DE $\frac{\sin u'}{\sin u}$ ET DE $\frac{du'}{du}$.

Nous poserons

$$(6) \quad \frac{\sin u'}{\sin u} = \gamma_0 \left[1 + \frac{u^2}{2} \left(\frac{1 - \gamma_0^2}{2} - 3\mathcal{A} \right) \right]$$

$\frac{\sin u'}{\sin u}$ doit se réduire à γ_0 pour $u = 0$, et ne doit pas changer si on change les signes de u, u' ; si on fait le calcul de $\frac{du'}{du}$ on trouve aisément

$$(6) \quad \frac{du'}{du} = \gamma_0 \left[1 + \frac{u^2}{2} \left(\frac{1 - \gamma_0^2}{2} - 3\mathcal{A} \right) \right];$$

on passe de la première expression à la seconde en changeant $\mathcal{A}$ en $3\mathcal{A}$. On utilisera aussi les formules :

$$(6') \quad \begin{cases} \frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{1}{\gamma_0} \left[1 - \frac{u^2}{2} \left(\frac{1 - \gamma_0^2}{2} - 3\mathcal{A} \right) \right] \\ \frac{du}{du'} = \frac{1}{\gamma_0} \left[1 - \frac{u^2}{2} \left(\frac{1 - \gamma_0^2}{2} - 3\mathcal{A} \right) \right] \end{cases}$$

2° DÉTERMINATION DE $\gamma_s - \gamma_t$. INÉGALE DILATATION. — L'inégale dilatation du pinceau est liée à la différence $\gamma_s - \gamma_t$, qu'on peut aisément calculer à l'aide des coefficients de la fonction d'astigmatisme.

Sur les directions conjuguées $AS, A'S'$, considérons les focales sagittales A, S_2 et les focales tangentielles T_0 et T_2 (fig. 9).

$$\begin{aligned} \overline{AT_0} - \overline{\gamma_0 T_0} &= \overline{A'T'_0} - \overline{\gamma'_0 T'_0} & \overline{S_2 T_2} &= \overline{\gamma_t} & \overline{S'_2 T'_2} &= \overline{\gamma'_t} \\ \overline{AS_2} - \overline{T_0 T} &= \overline{A'T_0} - \overline{S_2 T_2} = \overline{\gamma_0 - \gamma_t} & &= 2nu^2 & &= 2nzu^2 \\ \overline{A'S'_2} - \overline{T'_0 T'} &= \overline{A'T'_0} - \overline{S'_2 T'_2} = \overline{\gamma_0 - \gamma'_t} & &= 2n'u'^2 & &= 2n'x'u'^2. \end{aligned}$$

Si on pose $\frac{\sin u'}{\sin u} = \Gamma_s$ $\frac{du'}{du} = \Gamma_t$, on a :

$$\begin{aligned} k_s (\Gamma_s - \gamma_s) - k_t (\Gamma_t - \gamma_t) &= 2nu^2 (a - \alpha) \\ \frac{k_s (\Gamma_s - \gamma_s)}{\Gamma_s \gamma_s} - \frac{k_t (\Gamma_t - \gamma_t)}{\Gamma_t \gamma_t} &= 2n'u'^2 (a' - \alpha'). \end{aligned}$$

Or, toutes les quantités qui figurent au 1^{er} membre sont

des fonctions paires de u , elles comportent donc un terme constant et un terme du second ordre, on écrira :

$$\begin{aligned} k_s &= k(1 + pu^2) & k_t &= k(1 + qu^2) & \Gamma_s &= \gamma_0(1 + c_0u^2) & \Gamma_t &= \gamma_0(1 + d_0u^2) \\ \gamma_s &= \gamma(1 + cu^2) & \gamma_t &= \gamma(1 + du^2); \end{aligned}$$

la substitution, en ne conservant que les quantités du second ordre, nous donnera :

$$\begin{aligned} k(\gamma_0 - \gamma)(p - q) + k\gamma_0(c_0 - d_0) + k\gamma(c - d) &= 2n(a - x) \\ \frac{k(\gamma_0 - \gamma)}{\gamma_0\gamma}(p - q) + \frac{k_0}{\gamma}(c_0 - d_0) + \frac{k}{\gamma}(c - d) &= 2n'\gamma_0^2(a' - \alpha') \end{aligned}$$

l'élimination de $(p - q)$ donne

$$\begin{aligned} k(c_0 - d_0)(\gamma_0 - \gamma) + k(c - d)(\gamma_0 - \gamma) \\ = 2na - 2n'a'\gamma_0^2\gamma - 2nx + 2n'x'\gamma_0^2\gamma. \end{aligned}$$

Revenant aux rapports de convergence

$$\begin{aligned} & k(\gamma_0 - \gamma) \left[\frac{\Gamma_s - \Gamma_t}{\gamma_0} + \frac{\gamma_s - \gamma_t}{\gamma} \right] \\ = u^2 [2na - 2n'a'\gamma_0^2 - (2nx - 2n'x'\gamma_0^2\gamma^2) + (\gamma_0 - \gamma)\gamma_0^2(2n'a'\gamma_0 + 2n'x'\gamma)] \\ & k(\gamma_0 - \gamma) \left[\frac{\Gamma_s - \Gamma_t}{\gamma_0} + \frac{\gamma_s - \gamma_t}{\gamma} \right] \\ = u^2 [A(\gamma_0^2 - \gamma^2) + B(\gamma_0 - \gamma) + (\gamma_0 - \gamma)\gamma_0^2(2n'a'\gamma_0 + 2n'x'\gamma)] \\ \frac{\Gamma_s - \Gamma_t}{\gamma_0} + \frac{\gamma_s - \gamma_t}{\gamma} &= \frac{u^2}{k} [A(\gamma_0 + \gamma) + B + \gamma_0^2(2n'a'\gamma_0 + 2n'x'\gamma)] \end{aligned}$$

A, B, C sont les coefficients (trinômes en γ_0^2) de la fonction d'astigmatisme; la relation est applicable, quel que soit γ , et en particulier pour $\gamma = \gamma_0$ elle donne :

$$(7) \quad \Gamma_s - \Gamma_t = \frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{du'}{du} = A\gamma_0u^2 = \frac{u^2}{k} \left(A\gamma_0^2 + \frac{B}{2}\gamma_0 + 2n'a'\gamma_0^2 \right)$$

on en tire

$$(8) \quad \gamma_s - \gamma_t = \frac{u^2}{k} \left(A\gamma^2 + \frac{B}{2}\gamma + 2n'a'\gamma_0^2\gamma^2 \right).$$

On a évidemment aussi les formes suivantes :

$$(7') \quad \Delta\gamma_0 = \frac{1}{k} \left(-\frac{B}{2}\gamma_0 - C + 2na \right)$$

$$(8') \quad \gamma_s - \gamma_t = \frac{u^2}{k} \left(-\frac{B}{2}\gamma - C + 2nx \right)$$

sous cette dernière forme, on voit que si l'on s'astreint à avoir toujours $\alpha = 0$, ce qui revient à prendre un point objet, $(\gamma_s - \gamma_t)$ ne dépend que des coefficients B et C. Pour une valeur donnée de γ_0 , c'est-à-dire pour un ensemble de directions conjuguées, il n'y aura qu'un seul point d'égale dilatation, à moins que B et C ne soient nuls à la fois; ce point est donné par $\gamma = -\frac{2C}{B}$; si, d'ailleurs ce

point est un point de Petzval, $\alpha' = 0$ $\gamma = -\frac{B}{2A}$; dès lors $B^2 = 4AC$, la fonction d'astigmatisme a une racine double; d'où l'importante proposition suivante :

Un point de Petzval ne peut présenter une égale dilatation du pinceau que s'il est confondu avec l'autre point de Petzval (1).

On peut aussi remarquer que l'équation $B\gamma + 2C = 0$, pour une valeur donnée de γ est du second degré en γ_0 ; il pourra donc y avoir égale dilatation sur une surface donnée, pour deux positions du diaphragme, pourvu que l'équation ait ses racines réelles.

3° EXPRESSION DE $\frac{1}{k_s}, \frac{1}{k_t}$. — Nous allons supposer que si on fait varier u , dans sa section principale, de sa valeur actuelle à 0, la focale sagittale et la focale tangentielle de l'espace objet, décrivent deux courbes qui aboutissent normalement au même point de l'axe; ces deux courbes sont les méridiennes de deux surfaces de révolution normales à l'axe en leur sommet commun; dans l'espace image, les focales conjuguées décriront aussi des courbes normales à l'axe; le sommet commun des surfaces de l'espace objet, et le sommet commun des surfaces correspondantes de l'espace image sont des points conjugués de Gauss.

C'est en fonction des abscisses de ces points conjugués, et des

(1) Voir à la fin du chapitre.

quatre rayons de courbure au sommet des courbes lieux des focales, que nous allons évaluer les segments qui figurent dans $\frac{1}{k_s}, \frac{1}{k_t}$.

S_0 est le sommet des deux surfaces de l'espace objet, S'_0 le conjugué; on a, si ρ_s est le rayon de courbure au sommet de la surface sagittale

$$\begin{aligned} s &= AS_0 + \frac{u^2}{2} \left(\frac{AS_0^2}{\rho_s} + AS_0 \right) \\ \frac{1}{s} &= \frac{1}{AS_0} - \frac{u^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_s} + \frac{1}{AS_0} \right) \end{aligned}$$

ρ_s est compté à partir de S_0

A_0 étant la limite de A lorsque $u = 0$,

$$\begin{aligned} \overline{AS_0} &= \overline{A_0S_0} = \overline{A_0A} = x - z \\ \overline{AS_0} &= x - au^2 = x \left(1 - \frac{au^2}{x} \right) \\ \left(\begin{aligned} s &= x + \frac{u^2}{2} \left(\frac{x^2}{\rho_s} + x - 2a \right) \\ \frac{1}{s} &= \frac{1}{x} - \frac{u^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_s} + \frac{1}{x} - \frac{2a}{x^2} \right) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On aura de même les expressions de s' et de $\frac{1}{s'}$

$$\left(\begin{aligned} s' &= x' + \frac{u'^2}{2} \left(\frac{x'^2}{\rho'_s} + x' - 2a' \right) \\ \frac{1}{s'} &= \frac{1}{x'} - \frac{u'^2}{2} \left(\frac{1}{\rho'_s} + \frac{1}{x'} - \frac{2a'}{x'^2} \right); \end{aligned} \right. \quad (9')$$

d'autre part

$$l + r_0 = AS_0 + \frac{u^2}{2} \left(\frac{AS_0^2}{\rho_t} + AS_0 \right);$$

ρ_t étant le rayon de courbure de la courbe des focales tangentielles

$$\begin{aligned} l &= x + \frac{u^2}{2} \left(\frac{x^2}{\rho_t} + x - 2a \right) - 2au^2 \\ l &= x + \frac{u^2}{2} \left(\frac{x^2}{\rho_t} + x - 6a \right) \\ \frac{1}{l} &= \frac{1}{x} - \frac{u^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_t} + \frac{1}{x} - \frac{6a}{x^2} \right). \end{aligned}$$

On aura de même :

$$l' = x' + \frac{u'^2}{2} \left(\frac{x'^2}{\rho_i'^2} + x' - 6a' \right) = x' + \frac{\gamma_0^2 u^2}{2} \left(\frac{x'^2}{\rho_i'^2} + x' - 6a' \right)$$

$$\frac{1}{l'} = \frac{1}{x'} - \frac{u'^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_i'^2} + \frac{1}{x'} - \frac{6a'}{x'^2} \right)$$

Si, dans la valeur de $\frac{1}{k_s}$ nous substituons les valeurs développées précédentes, nous obtenons :

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k} - \frac{\gamma_0 u^2}{2} \left(\frac{\gamma_0^2 + 1}{2k\gamma_0} + \frac{1}{n\rho_s} - \frac{1}{n'\rho_s'} + \frac{\mathfrak{A}(\gamma_0 + \gamma)}{k\gamma_0(\gamma_0 - \gamma)} - \frac{2na - 2n'a'\gamma_0^2\gamma^2}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2} \right)$$

nx a été remplacé par $k(\gamma_0 - \gamma)$ et $n'x'$ par $\frac{k(\gamma_0 - \gamma)}{\gamma_0\gamma}$.

On peut écrire immédiatement $\frac{1}{k_i}$, car il suffit de remplacer $\rho_s, \rho_s',$ par ρ_i, ρ_i' et $\mathfrak{A}, a, a',$ par $3\mathfrak{A}, 3a, 3a'$

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k} - \frac{\gamma_0 u^2}{2} \left(\frac{\gamma_0^2 + 1}{2k\gamma_0} + \frac{1}{n\rho_i} - \frac{1}{n'\rho_i'} + \frac{3\mathfrak{A}(\gamma_0 + \gamma)}{k\gamma_0(\gamma_0 - \gamma)} - \frac{6na - 6n'a'\gamma_0^2\gamma^2}{(k^2\gamma_0 - \gamma)^2} \right)$$

Nous allons établir entre les 4 rayons de courbure des relations qui vont nous permettre de les éliminer de ces formules. On a déjà utilisé la relation $s + r = r_0 + l$ (*fig. 9^{ter}*).

on

$$ns - nl = \frac{u^2}{2} \left[n^2 x^2 \left(\frac{1}{n\rho_s} - \frac{1}{n\rho_i} \right) + 4an \right]$$

$$nr_0 - nr_i = 2n(a - x)u^2$$

$$4n(a - x) = n^2 x^2 \left(\frac{1}{n\rho_s} - \frac{1}{n\rho_i} \right) + 4an$$

$$\frac{1}{n\rho_s} - \frac{1}{n\rho_i} = \frac{4nx}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2}$$

de même,

$$\frac{1}{n'\rho_s'} - \frac{1}{n'\rho_i'} = -\frac{4n'x'\gamma_0^2\gamma^2}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2}$$

d'où :

$$\left(\frac{1}{n\rho_i} - \frac{1}{n'\rho_i'} \right) - \left(\frac{1}{n\rho_s} - \frac{1}{n'\rho_s'} \right) = \frac{4nx - \gamma_0^2\gamma^2 4n'x'}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2} = \frac{2Q}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2}$$

D'autre part, si on forme $\frac{3}{k_s} - \frac{1}{k_t}$ on obtient :

$$\frac{3}{k_s} - \frac{1}{k_t} - \frac{2}{k} + u^2 \frac{\gamma_0^2 + 1}{2k} = \gamma_0 \frac{u^2}{2} \left[3 \left(\frac{1}{n \rho_s} - \frac{1}{n' \rho'_s} \right) - \left(\frac{1}{n \rho_t} - \frac{1}{n' \rho'_t} \right) \right]$$

dans cette égalité, le premier membre est assurément indépendant de γ , on pourra donc poser :

$$\therefore \left(\frac{1}{n \rho_s} - \frac{1}{n' \rho'_s} \right) - \left(\frac{1}{n \rho_t} - \frac{1}{n' \rho'_t} \right) = 2V$$

V, pour un système donné, ne pouvant varier qu'avec γ_0 ; si le système comprend un couple conjugué de surfaces aplanétiques, il est facile de déterminer la valeur de V, en posant $\rho_s = \rho_t = R$, $\rho'_s = \rho'_t = R'$

$$V = \frac{1}{nR} - \frac{1}{n'R'}$$

V est une constante absolue évidemment indépendante du point où a lieu la diaphragmation. Pour chaque dioptré du système, on a

$$V_i = \frac{1}{R_i} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right)$$

il est bien clair que les dioptrés successifs présentent, pour chaque surface lieu, un rayon de courbure commun, qui est dans l'espace image de l'un et dans l'espace objet du suivant; quand on fera la somme des équations relatives à chaque dioptré, tous les rayons de courbure intermédiaires disparaîtront et :

$$3 \left(\frac{1}{n \rho_s} - \frac{1}{n' \rho'_s} \right) - \left(\frac{1}{n \rho_t} - \frac{1}{n' \rho'_t} \right) = 2V = 2 \sum V_i = 2 \sum \frac{1}{R_i} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right)$$

On pourra donc calculer les différences

$$\frac{1}{n \rho_s} - \frac{1}{n' \rho'_s} = V + \frac{Q}{k^2 (\gamma_0 - \gamma)^2} \quad \frac{1}{n \rho_t} - \frac{1}{n' \rho'_t} = V + \frac{3Q}{k^2 (\gamma_0 - \gamma)^2};$$

il est visible que les surfaces de l'espace objet étant confondues,

celles de l'espace image ne pourront l'être que pour les valeurs de γ qui annulent Q, c'est-à-dire pour les surfaces de Petzval.

Portons ces valeurs des rayons de courbure dans les expressions

de $\frac{1}{k_s}$, $\frac{1}{k_t}$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_s} &= \frac{1}{k} - \gamma_0 \frac{u^2}{2} \left[\frac{\gamma_0^2 + 1}{2k\gamma_0} + V + \frac{A\gamma^2 + B\gamma + C}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B(\gamma_0 + \gamma)}{k\gamma_0(\gamma_0 - \gamma)} - \frac{2na - 2n'a'\gamma_0^2\gamma^2}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2} \right] \\ \frac{1}{k_t} &= \frac{1}{k} - \gamma_0 \frac{u^2}{2} \left[\frac{\gamma_0^2 + 1}{2k\gamma_0} + V + \frac{A\gamma^2 + B\gamma + C}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3B(\gamma_0 + \gamma)}{k\gamma_0(\gamma_0 - \gamma)} - \frac{6na - 6n'a'\gamma_0^2\gamma^2}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2} \right] \end{aligned}$$

$\frac{1}{k_s}$ et $\frac{1}{k_t}$ ne dépendent pas de γ , dès lors :

$$\frac{A\gamma^2 + B\gamma + C}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2} + \frac{A(\gamma_0 + \gamma)}{k\gamma_0(\gamma_0 - \gamma)} - \frac{2na - 2n'a'\gamma_0^2\gamma^2}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2}$$

doit présenter la même valeur quel que soit γ (qui peut prendre toutes les valeurs sauf γ_0). Faisons par exemple $\gamma = -\gamma_0$, l'expression devient :

$$\frac{A\gamma_0^2 - B\gamma_0 + C}{4k^2\gamma_0^2} - \frac{2na - 2n'a'\gamma_0^4}{4k^2\gamma_0^2}$$

soit,

$$\frac{A\gamma_0^2 - B\gamma_0 + C}{4k^2\gamma_0^2} - \frac{A\gamma_0^2 + B\gamma_0 + C}{4k^2\gamma_0^2} = -\frac{B}{2k^2\gamma_0}$$

dès lors on aura

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{k_s} &= \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{2} \left(\frac{\gamma_0^2 + 2kV\gamma_0 + 1}{2} - \frac{B}{2k} \right) \right] \\ \frac{1}{k_t} &= \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{2} \left(\frac{\gamma_0^2 + 2kV\gamma_0 + 1}{2} - \frac{3B}{2k} \right) \right] \\ k_s &= k \left[1 + \frac{u^2}{2} \left(\frac{\gamma_0^2 + 2kV\gamma_0 + 1}{2} - \frac{B}{2k} \right) \right] \\ k_t &= k \left[1 - \frac{u^2}{4k} (3B_2 - k)\gamma_0^2 + (3B_1 - 2k^2V)\gamma_0 + 3B_0 - k \right] \end{aligned} \right.$$

En donnant à γ la valeur 0, on retrouve aisément la valeur de $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\frac{1}{2k\gamma_0} \left(B\gamma_0 + 2C - 4na \right) = \frac{1}{2k\gamma_0} (2A\gamma_0^2 + B\gamma_0 + 4n'a'\gamma_0^4) \\ &= \frac{1}{2k\gamma_0} (A\gamma_0^2 - C + 2na + 2n'a'\gamma_0^4)\end{aligned}$$

(¹) On peut déduire de la formule (8'), que le point sans distortion est équi distant des points de Petzval, donnés par la formule

$$\frac{1}{\gamma} = -\frac{B}{2C} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$$

si on pose, au point sans distortion (d, d'),

$$\begin{aligned}\gamma_d = \gamma_s = \gamma_t &= -\frac{B}{2C} \text{ et } \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} = \frac{1}{q} \\ \frac{1}{\gamma} &= \frac{1}{\gamma_d} \pm \frac{1}{q} \quad k \left(\frac{1}{\gamma_d} - \frac{1}{\gamma} \right) = \mp \frac{k}{q},\end{aligned}$$

les abscisses des points de Petzval par rapport au point sans distortion sont égales et de signes contraires. D'une manière plus précise, en dehors de toute approximation, les équations des focales sont respectivement :

$$\frac{\gamma_d}{ns} - \frac{1}{\gamma_d n's'} = \frac{1}{k}, \quad \frac{\gamma_d}{nt} - \frac{1}{\gamma_d n't'} = \frac{1}{k};$$

s, t , ayant pour origine le point objet sans distortion S

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{t'} = n'\gamma_d \left(\frac{1}{k_t} - \frac{1}{k_s} \right) = \frac{1}{\varphi}, \text{ si } s = t;$$

dans l'espace-image, prenons pour origine le milieu du segment $S'T' = \eta'_1$; au point de Petzval $s' = x' + \frac{\eta'_1}{2}$ $t' = x' - \frac{\eta'_1}{2}$ d'où $x'^2 = \frac{\eta'^2_1}{4} - \varphi\eta'_1$, les deux points où l'astigmatisme est nul sont équidistants du milieu des 2 focales du point sans distortion. En réalité, $\varphi\eta'_1$ est fini, $\frac{\eta'^2_1}{4}$ est du 4^e ordre

$$x' = \pm \sqrt{-\varphi\eta'_1} = \pm 2k \sqrt{\frac{\alpha'\gamma_d}{B}}$$

CHAPITRE V

Réduction du nombre des coefficients.

1° Fonction d'astigmatisme.

Au moyen des formules précédentes, nous allons expliciter la condition de stabilisation d'un point de Petzval.

Sur le rayon SP (*fig. 11*) supposons qu'il existe un point de Petzval P à une distance s du point S pris sur l'axe, P' sera conjugué du point P; soit $S'P' = s'$, soient u, u' les inclinaisons; $s \sin u = h, s' \sin u' = h'$.

Le point P étant une focale sagittale, on aura :

$$\frac{\sin u'}{ns \sin u} - \frac{\sin u}{n's' \sin u'} = \frac{1}{k_s}.$$

Or, si P représente un point de Petzval stabilisé, il sera également point de Petzval sur ΣP qui fait avec l'axe l'angle $u + \delta u$, et dès lors

$$\begin{aligned} \frac{\sin(u' + \delta u')}{nh} - \frac{\sin(u + \delta u)}{n'h'} &= \frac{1}{k_s} + \delta \frac{1}{k_s} \\ \frac{\delta u' \cos u'}{nh} - \frac{\delta u \cos u}{n'h'} &= \delta \frac{1}{k_s}; \end{aligned}$$

cette relation pourra donc être regardée comme la condition de stabilisation; on pourra l'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\delta u'}{\delta u} &= \frac{nh}{n'h'} \left(\frac{\cos u}{\cos u'} + \frac{n'h'}{\cos u'} \frac{\delta}{\delta u} \frac{1}{k_s} \right) \\ \text{mais } \frac{1}{k_s} &= \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{4} \left(\gamma_0^2 + 2kV\gamma_0 + 1 - \frac{B}{k} \right) \right] \\ \frac{d}{du} \frac{1}{k} &= -\frac{u}{2k} \left(\gamma_0^2 + 2kV\gamma_0 + 1 - \frac{B}{k} \right) \\ &\quad - \frac{u^2}{2k} \left(\gamma_0 + kV - \frac{1}{2k} \frac{dB}{d\gamma_0} \right) \frac{\delta \gamma_0}{\delta u} \end{aligned}$$

Pour évaluer $\frac{\partial \gamma_0}{\partial u}$ nous remarquerons que $S\Sigma$, $S'\Sigma'$ ne diffèrent de leurs limites $S_0\Sigma_0$, $S'_0\Sigma'_0$, relatives à des inclinaisons nulles que de quantités, ici négligeables, qui sont les variations de au^2 et de $a'u'^2$; on pourra donc écrire : $\overline{n\Sigma\Sigma} (= ns\partial u : \sin u) = -k\partial\gamma_0$

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial u} = -\frac{1}{k} \frac{ns}{\sin u} = +\frac{\gamma - \gamma_0}{u}$$

avec la même approximation

$$\begin{aligned} \frac{n'h'}{\cos u'} &= \frac{n's' \sin u'}{\cos u'} = \frac{k(\gamma_0 - \gamma)u}{\gamma} \\ \frac{n'h'}{\cos u'} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{k_s} &= -\frac{u^2(\gamma_0 - \gamma)}{2\gamma} \left\{ \left(\gamma_0^2 + 2kV\gamma_0 \right) + 1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{B}{k} - (\gamma_0 - \gamma) \left(\gamma_0 + kV - \frac{1}{2k} \frac{dB}{d\gamma_0} \right) \right\} \end{aligned}$$

et enfin puisque $\frac{nh}{n'h'} = \gamma_s$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial u} = \gamma_t = \gamma_s \left\{ 1 + \frac{u^2}{2} \left[\gamma_0^2 - 1 - \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma} (\gamma_0^2 + 2kV\gamma_0) + 1 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{B}{k} - (\gamma_0 - \gamma) \left(\gamma_0 + kV - \frac{1}{2k} \frac{dB}{d\gamma_0} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

on pourra donc calculer la différence $\gamma_s - \gamma_t$

$$\begin{aligned} (11_a) \quad \gamma_s - \gamma_t &= \frac{u^2}{2} \left\{ \gamma_0 \left[1 + kV\gamma_0 - \frac{1}{2k} \left(2B - \gamma_0 \frac{dB}{d\gamma_0} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{k} \left(B - \gamma_0 \frac{dB}{d\gamma_0} \right) - \gamma^2 \left(\gamma_0 + kV - \frac{1}{2k} \frac{dB}{d\gamma_0} \right) \right\} \end{aligned}$$

Mais nous avons déjà une évaluation de $\gamma_s - \gamma_t$ en un point de Petzval (8)

$$\gamma_s - \gamma_t = \frac{u^2}{2k} (2A\gamma^2 + B\gamma) = \frac{u^2}{2k} (A\gamma^2 - C) = -\frac{u^2}{2k} (B\gamma + 2C);$$

galons la valeur (11_a) à la première des trois précédentes et nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} (11_b) \quad \gamma^2 \left[k(\gamma_0 + kV) - \frac{1}{2} \frac{dB}{d\gamma_0} + 2A \right] + \gamma\gamma_0 \frac{dB}{d\gamma_0} \\ - k\gamma_0(1 + \gamma_0 kV) + \gamma_0 \left(B - \gamma_0 \frac{dB}{d\gamma_0} \right) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation traduit la stabilisation du point de Petzval, mais elle ne traduit pas que cela; en effet, nous nous sommes bornés à écrire que les distances PH, P'H' demeurent, à la fois, invariables; or, cette circonstance se produit assurément, si le point S est à l'infini ou au voisinage du foyer; dans le premier cas, si par le point P' passent 2 rayons émergents coupant l'axe au voisinage du foyer image, les focales sagittales conjuguées de P' sur les deux rayons incidents, étant situées sur deux rayons sensiblement parallèles à l'axe, pourront être regardées comme à la même distance de l'axe; dans le second cas, le rayon infiniment voisin issu du point P, rencontrant l'axe au voisinage du foyer objet, les focales sagittales conjuguées sont sur deux droites presque parallèles à l'axe; les distances h, h' , sont donc constantes à la fois et on a le droit d'écrire l'équation (11_b).

Il résulte de là que l'équation précédente doit être satisfaite pour γ_0 infini et $\gamma_0 = 0$.

Or, le coefficient du terme en γ_0^3 est $B_2 - B_2$, donc pour une valeur déterminée de γ , l'équation a une solution infinie en γ_0 et l'équation tombe au second degré.

Le terme de degré 0 en γ_0 est $\gamma^2 \left(2A_0 - \frac{B_1}{2} + k^2V \right)$; pour que l'équation admette la solution $\gamma_0 = 0$, γ ayant une valeur déterminée, il est nécessaire que $A_0 = \frac{B_1 - 2k^2V}{4}$.

L'équation de stabilisation du point de Petzval devient alors :

$$\gamma^2(k - B_2 + 2A_2\gamma_0 + 2A_1) + \gamma(2B_2\gamma_0 + B_1) + \frac{B_1\gamma_0}{2} + B_0 - k(1 + \gamma_0kV) = 0.$$

Si on la compare à l'équation générale

$$(2) \quad \gamma^2 \frac{dA}{d\gamma_0} + \gamma \frac{dB}{d\gamma_0} + \frac{dC}{d\gamma} = 0$$

$$\text{ou} \quad \gamma^2(2A_2\gamma_0 + A_1) + \gamma(2B_2\gamma_0 + B_1) + 2C_2\gamma_0 + C_1 = 0$$

l'identité de ces conditions exige :

$$A_1 = B_2 - k, \quad \left(2C_2 - \frac{B_1 - 2k^2V}{2} \right) \gamma_0 = B_0 - k - C_1.$$

Or, cette dernière égalité doit avoir lieu pour les quatre valeurs de γ_0 qui, dans le cas général, assurent la stabilisation au point γ ,

et, si le déterminant Δ des neuf coefficients est nul, pour les deux valeurs de γ_0 qui stabilisent à la fois les deux surfaces de Petzval; on doit donc avoir séparément :

$$C_2 = \frac{B_1 - 2k^2V}{4} \quad \text{et} \quad C_1 = B_0 - k.$$

On a donc entre les 9 coefficients les quatre relations

$$A_0 = C_2 = \frac{B_1 - 2k^2V}{4} \quad A_1 = B_2 - k \quad C_1 = B_0 - k.$$

La fonction d'astigmatisme s'écrira :

$$Q = \left[A_2 \gamma_0^2 + (B_2 - k) \gamma_0 + \frac{B_1 - 2k^2V}{4} \right] \gamma^2 + (B_2 \gamma_0^2 + B_1 \gamma_0 + B) \gamma \\ + \left[\frac{B_1 - 2k^2V}{4} \gamma_0^2 + (B_0 - k) \gamma_0 + C_0 \right].$$

2^e Fonction de coma.

Les huit coefficients de la fonction de coma vont être déterminés tout d'abord par l'identité

$$(1) \quad A\gamma_0^2 + B\gamma_0 + C = D\gamma_0^3 + E\gamma_0^2 + F\gamma_0 + G$$

qui donnera :

$$d_2 = A_2 \quad d_1 + e_2 = A_1 + B_2 = 2B_2 - k \quad e_1 + f_2 = A_0 + B_1 + C_2 \\ = \frac{3B_1}{2} - k^2V \\ g_1 = C_0 \quad e_1 + g_2 = B_0 + C_1 = 2B_0 + k;$$

pour achever la détermination, nous remarquerons que la condition de stabilisation d'un point de Petzval, γ , peut s'exprimer en écrivant que γ est racine commune de la fonction d'astigmatisme et de la fonction de coma, c'est-à-dire que le point γ est à la fois point de Petzval et point de Fermat; il faut donc que les trois équations :

$$A\gamma^2 + B\gamma + C = 0 \quad \gamma^2 \frac{dA}{d\gamma_0} + \gamma \frac{dB}{d\gamma_0} + \frac{dC}{d\gamma_0} = 0 \quad D\gamma^3 + E\gamma^2 + F\gamma + G = 0$$

aient une racine commune. Les deux équations extrêmes peuvent être remplacées par un système plus simple, en remarquant que :

$$D\gamma^3 + E\gamma^2 + F\gamma + G - A\gamma^2 - B\gamma - C = 0$$

admet évidemment la solution $\gamma = \gamma_0$ et devient :

$$D\gamma^2 + \gamma (D\gamma_0 + E - A) + (D\gamma_0^2 + E\gamma_0 + F - A\gamma_0 - B) = 0$$

ou $D\gamma^2 + \gamma (D\gamma_0 + E - A) + \frac{C - G}{\gamma_0} = 0$

et en substituant les valeurs précédemment trouvées

$$(A_2\gamma_0 + d_1)\gamma^2 + (B_2\gamma_0 - A_0 + e_1)\gamma + C_2\gamma_0 + C_1 - g_2 = 0;$$

si on retranche cette équation multipliée par γ_0 de $A\gamma^2 + B\gamma + C = 0$, on obtient après réduction :

$$[(A_1 - d_1)\gamma_0 + A_0]\gamma^2 + [(A_0 + B_1 - e_1)\gamma_0 B_0]\gamma + g_2\gamma_0 + C_0 = 0.$$

La condition de l'existence d'une racine commune en γ conduit à une équation du 4^e degré en γ_0 , qui doit avoir, les mêmes racines en γ_0 que l'équation de stabilisation déjà formée; l'égalité des rapports des cinq coefficients des deux équations, donnerait les relations cherchées; on y arrive plus simplement en écrivant la valeur de γ_0 qui correspond à la racine commune

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= - \frac{d_1\gamma^2 - (A_0 - e_1)\gamma + C_1 - g_2}{A_2\gamma^2 + B_2\gamma + C_2} \\ &= - \frac{A_0\gamma^2 + B_0\gamma + C_0}{(A_1 - d_1)\gamma^2 + A_0 + B_1 - e_1)\gamma + g_2}, \end{aligned}$$

les deux derniers membres fournissent une équation du quatrième degré en γ qui donne les quatre valeurs de γ correspondant aux quatre valeurs de γ_0 pour lesquelles il y a stabilisation d'un point de Petzval; c'est au point correspondant γ que se trouve la surface de Petzval stabilisée. Comparons avec les valeurs de γ_0 , qui, d'après la formule dérivée des équations (2), correspondent à la valeur stabilisée de γ

$$\gamma_0 = \frac{A_1\gamma^2 + B_1\gamma + C_1}{2(A_2\gamma^2 + B_2\gamma + C_1)} = - \frac{2(A_0\gamma^2 + B_0\gamma + C_0)}{A_1\gamma^2 + B_1\gamma + C_1}$$

les derniers membres doivent donner les mêmes quatre valeurs de γ , et à chaque valeur de γ doit correspondre une même valeur de γ_0 ; si on divise membre à membre, on a :

$$1 = \frac{2d_1\gamma^2 - 2(\Lambda_0 - e_1)\gamma + 2(C_1 - g_2)}{\Lambda_1\gamma^2 + B_1\gamma + C_1} \\ = \frac{A_1\gamma^2 + B_1\gamma + C_1}{2(\Lambda_1 - d_1)\gamma^2 + 2(\Lambda_0 + B_1 - e_1)\gamma + 2g_2}$$

ce qui donne l'unique condition,

$$(\Lambda_1 - 2d_1)\gamma^2 + (2\Lambda_0 + B_1 - 2e_1)\gamma - (C_1 - 2g_2) = 0$$

devant être satisfaite pour quatre valeurs de γ ; dès lors

$$2d_1 = A_1 \quad 2e_1 = 2\Lambda_0 + B_1 \quad 2g_2 = C_1$$

les huit coefficients de la fonction de coma ont ainsi les valeurs

$$d_2 = A_2 \quad d_1 = \frac{B_2 - k}{2} \quad e_2 = 3\frac{B_2}{2} - \frac{k}{2} \quad e_1 = 3\frac{B_1}{4} - \frac{k^2V}{2} \\ f_2 = e_1 = \frac{3B_1}{4} - \frac{k^2V}{2} \quad f_1 = 3\frac{B_0}{2} - \frac{k}{2} \quad g_2 = \frac{B_0 - k}{2} \quad g_1 = C_0$$

Nous transcrivons ici les quatre fonctions que nous avons ainsi exprimées au moyen des cinq paramètres nouveaux A_2, B_2, B_1, B_0, C_0 ,

Fonction d'astigmatisme.

$$(12) \quad Q = \left[A_2\gamma_0^2 + (B_2 - k)\gamma_0 + \frac{B_1}{4} - \frac{k^2V}{2} \right] \gamma^2 \\ + \left[B_2\gamma_0^2 + B_1\gamma_0 + B_0 \right] \gamma + \left(\frac{B_1}{4} - \frac{k^2V}{2} \right) \gamma_0^2 + (B_0 - k)\gamma_0 + C_0$$

Fonction de coma.

$$(13) \quad \Phi_{(1)} = \left(A_2\gamma_0 + \frac{B_2 - k}{2} \right) \gamma^3 + \left[\left(3\frac{B_2}{2} - \frac{k}{2} \right) \gamma_0 + 3\frac{B_1}{4} - \frac{k^2V}{2} \right] \gamma_3 \\ + \left[\left(3\frac{B_1}{4} - \frac{k^2V}{2} \right) \gamma_0 + 3\frac{B_0}{2} - \frac{k}{2} \right] \gamma + \frac{B_0 - k}{2} \gamma_0 + C_0.$$

Fonction d'aberration.

$$(14) \quad P = A_2 \gamma_0^4 + (2B_2 - k) \gamma_0^3 + \left(\frac{3B_1}{2} - k^2 V \right) \gamma_0^2 + (2B_0 - k) \gamma_0 + C_0$$

Fonction de distorsion.

$$(15) \quad D = + \frac{2k(\gamma_s - \gamma_t)}{u_2} = - \left\{ (B_2 \gamma_0^2 + B_1 \gamma_0 + B_0) \gamma + \left(\frac{B_1}{2} - k^2 V \right) \gamma_0^2 + 2(B_0 - k) \gamma_0 + 2C_0 \right\}$$

(Il faut se rappeler que cette forme (15) suppose l'existence d'un point objet.)

On voit donc que la détermination des cinq nouveaux paramètres A_2, B_2, B_1, B_0, C_0 , permet l'étude complète du système centré.

Cette détermination peut avoir lieu par le calcul, ou par une recherche expérimentale.

Effectuons le calcul d'abord pour un dioptré.

$$(1) \quad \Phi = Q + \frac{\gamma - \gamma_0}{2} \left(\frac{dA}{d\gamma_0} \gamma^2 + \frac{dB}{d\gamma_0} \gamma + \frac{dC}{d\gamma_0} \right)$$

CHAPITRE VI

Dioptre sphérique.

Les 2 rayons conjugués PI, P'I (*fig. 12*) rencontrent en A, A', les surfaces aplanétiques; en ces derniers points, comme on le verra d'ailleurs plus tard, les rapports de convergence sont $\gamma_s = \frac{n'}{n}$, $\gamma_t = \frac{n' \cos i'}{n \cos i}$, tandis qu'au point I les rapports présentent les valeurs inverses $\frac{n}{n'}$, $\frac{n \cos i}{n' \cos i'}$, de plus on a $nAI = n'A'I = -R(n \cos i + n' \cos i')$, comme on peut le voir en projetant les contours ACI, A'CI sur PI, P'I; dès lors

$$k_s \left(\frac{n'}{n} - \frac{n}{n'} \right) = l_t \left(\frac{n' \cos i'}{n \cos i} - \frac{n \cos i}{n' \cos i'} \right) = -R(n \cos i + n' \cos i')$$

et on retrouve les expressions déjà calculées (21, 22, 1^{re} partie)

$$k_s = -nn'R \frac{n \cos i + n' \cos i'}{n'^2 - n^2} = k \frac{n \cos i + n' \cos i'}{n} = k \frac{\cos \frac{i+i'}{2}}{\cos \frac{i-i'}{2}}$$

$$k_t = -nn'R \frac{\cos i \cos i'}{n' \cos i' - n \cos i} = k \frac{\cos \frac{i+i'}{2}}{\cos \frac{i-i'}{2}} \cos i \cos i'$$

en introduisant l'approximation convenue

$$l_s = k \left(1 - \frac{i \cdot i'}{2} \right) \quad k_t = k \left(1 - \frac{i^2 + i \cdot i' + i'^2}{2} \right)$$

$$\frac{\sin i}{\sin u} = \frac{PC}{CI} = \frac{PC}{-R} = \frac{k(\gamma_0 - 1)}{-nR} = \frac{n'(\gamma_0 - 1)}{(n' - n)},$$

approximativement $i = \frac{un'(\gamma_0 - 1)}{n' - n}$ et aussi $i' = u \frac{n(\gamma_0 - 1)}{n' - n}$;

substituant,

$$k_s = k \left[1 - \frac{u^2}{2} \frac{nn'}{(n' - n)^2} (\gamma_0 - 1)^2 \right]$$

$$k_t = k \left[1 - \frac{u^2}{2} \frac{n^2 + nn' + n^2}{(n' - n)^2} (\gamma_0 - 1)^2 \right]$$

ou, la comparaison aux formules générales, nous écrivons :

$$k_s = k \left[1 + \frac{u^2}{2} \left(\frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2} - \frac{n^2 + n'^2}{2(n - n')^2} (\gamma_0 - 1)^2 \right) \right]$$

$$k_t = k \left[1 + \frac{u^2}{2} \left(\frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2} - 3 \frac{n^2 + n'^2}{2(n - n')^2} (\gamma_0 - 1)^2 \right) \right]$$

et l'on voit que $kV = -1$ et $B = k \frac{n^2 + n'^2}{(n - n')^2} (\gamma_0 - 1)^2$.

Nous prendrons toujours

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \gamma_0 \left[1 + \frac{u^2}{2} \left(\frac{1 - \gamma_0^2}{2} - A \right) \right]$$

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \gamma_0 \left[1 + \frac{u^2}{2} \left(\frac{1 - \gamma_0^2}{2} - 3A \right) \right]$$

Calcul de l'astigmatisme sur l'axe et par suite de la fonction d'aberration.

Calculons $PQ = r_0 = 2au^2$ comme la différence de PI et de QI

$$2nau^2 = k_s \left(\frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{n}{n'} \right) - k_t \left(\frac{\partial u'}{\partial u} - \frac{n \cos i}{n' \cos i'} \right)$$

$$2nau^2 = k \left[\frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{\partial u'}{\partial u} - \frac{n}{n'} \left(1 - \frac{\cos i}{\cos i'} \right) \right] + \left[(k_s - k_t) \left(\gamma_0 - \frac{n}{n'} \right) \right]$$

$$\text{or } \frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{\partial u'}{\partial u} = \mathcal{A} \gamma_0 u^2 \quad k_s - k_i = k \frac{u^2}{2} \frac{n^2 + n'^2}{(n - n')^2} (\gamma_0 - 1)^2$$

$$1 - \frac{\cos i}{\cos i'} = \frac{u^2}{2} \frac{n'^2 - n^2}{(n' - n)^2} (\gamma_0 - 1)^2$$

$$\frac{2na}{k} = \mathcal{A} \gamma_0 + \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2(n - n')^2} [(n^2 + n'^2) \gamma_0 - 2nn'].$$

On évalue ait de la même manière l'aberration dans le 2^e milieu :

$$2n'a'u'^2 = k_s \left(\frac{n'}{n} - \frac{\sin u}{\sin u'} \right) - k_i \left(\frac{n' \cos i'}{n \cos i} - \frac{\partial u}{\partial u'} \right)$$

et des transformations semblables aux précédentes donnent :

$$\frac{2n'a'\gamma_0^2}{k} = \frac{\mathcal{A}}{\gamma_0} + \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2(n - n')^2} \left[2nn' - (n^2 + n'^2) \frac{1}{\gamma_0} \right]$$

L'élimination de $\mathcal{A}$ conduira à la fonction d'aberration

$$(14') P = 2na - 2n'a'\gamma_0^2 = -k \frac{nn'}{(n' - n)^2} (\gamma_0 - 1)^2 \left(\gamma_0 - \frac{n}{n'} \right) \left(\gamma_0 - \frac{n'}{n} \right)$$

Calcul de l'astigmatisme hors de l'axe, et de la fonction d'astigmatisme.

On pourra employer un procédé tout à fait semblable pour calculer les distances ST, S'T', d'une focale sagittale à une focale tangentielle dans l'espace objet et dans l'espace image (*fig. 12*)

$$ST = \eta = 2xu^2 = SI - TI$$

On n'aura qu'à remplacer $\frac{\sin u'}{\sin u}$ par γ_s et $\frac{\partial u'}{\partial u}$ par γ_i

$$2nxu^2 = k(\gamma_s - \gamma_i) - k \frac{u^2}{2} (\gamma_0 - 1)^2 \left[\frac{n}{n'} \frac{n'^2 - n^2}{(n' - n)^2} - \frac{n^2 + n'^2}{(n' - n)^2} \left(\gamma - \frac{n}{n'} \right) \right]$$

$$\text{ou} \quad 2nx = \frac{k(\gamma_s - \gamma_i)}{u^2} + \frac{k(\gamma_0 - 1)^2}{2(n' - n)^2} \left[(n^2 + n'^2) \gamma - 2nn' \right]$$

de même

$$2n'\alpha'\gamma_0^2 = \frac{k(\gamma_s - \gamma_t)}{\gamma^2 u^2} = \frac{k(\gamma_0 - 1)^2}{2(n' - n)^2} \left[(n^2 + n'^2) \frac{1}{\gamma} - 2nn' \right]$$

et par élimination de $\frac{k}{n^2} (\gamma_s - \gamma_t)$

$$(12') \quad 2 = 2n\alpha - 2n'\alpha'\gamma_0^2 = -k \frac{n'n}{(n - n')^2} (\gamma_0 - 1)^2 \left(\gamma - \frac{n'}{n} \right) \left(\gamma - \frac{n}{n'} \right)$$

Les formules précédentes permettent le calcul de $\mathcal{A}$ et de $\gamma_s - \gamma_t$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{2na}{k\gamma_0} - \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2(n - n')^2} \left(n^2 + n'^2 - \frac{2nn'}{\gamma_0} \right) \\ &= \frac{2n'a'\gamma_0^3}{k} + \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2(n' - n)^2} (n^2 + n'^2 - 2nn'\gamma_0). \\ - \frac{2k(\gamma_s - \gamma_t)}{u^2} &= \frac{k(\gamma_0 - 1)^2}{(n - n')^2} [(n^2 + n'^2)\gamma - 2nn'] - 4n\alpha \\ &= - \frac{k(\gamma_0 - 1)^2}{(n - n')^2} [(n^2 + n'^2)\gamma - 2nn'\gamma^2] - 4n'\alpha'\gamma_0^2\gamma^2. \end{aligned}$$

Ces dernières formules permettent d'étudier la distorsion et de trouver que $(\gamma_s - \gamma_t)$ est : 1° constamment nul sur une droite qui passe par le centre, et 2°, sur toute autre direction, rencontrant l'axe, ne s'annule que pour

$$\gamma_a = \frac{2nn'}{n^2 + n'^2} \text{ au point } (d, d'), \text{ (on suppose } \alpha = 0)$$

$$\frac{2}{\gamma_a} = \frac{n}{n'} + \frac{n'}{n}, \text{ le point } d' \text{ est bien équidistant de I et de A'}$$

Calcul de la variation du chemin optique. et de la fonction de coma.

Soient, dans une section principale (*fig. 13*) les rayons infiniment voisins issus du point T : TI, TJ, d'inclinaison $u, u + \delta u$, les conjugués T'I, T'J, d'inclinaison $u', u' + \delta u'$, $\delta\omega$ l'angle JOI et σ la corde IJ, la variation de la longueur optique en passant de TI à TJ est :

$$\Delta = n(TJ - TI) - n'(T'J - T'I)$$

$$\begin{aligned}
 \text{or} \quad \frac{TJ}{\cos \left(i + \frac{\partial \omega}{2} \right)} &= \frac{TI}{\cos \left(i' + \partial i' - \frac{\partial \omega}{2} \right)} = \frac{\sigma}{\sin \partial u} \\
 &= \frac{TJ - TI}{-2 \sin \left(i + \frac{\partial i}{2} \right) \sin \frac{\partial \omega - \partial i}{2}} \\
 \frac{T'J}{\cos \left(i' + \frac{\partial \omega}{2} \right)} &= \frac{T'I}{\cos \left(i' + \partial i' - \frac{\partial \omega}{2} \right)} = \frac{\sigma}{\sin \partial u'} \\
 &= \frac{T'J - T'I}{-2 \sin \left(i' + \frac{\partial i'}{2} \right) \sin \frac{\partial \omega - \partial i'}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\partial \omega = \partial i + \partial u = \partial i' + \partial u'$$

$$\Delta = -\sigma \left(\frac{n \sin \left(i + \frac{\partial i}{2} \right)}{\cos \frac{\partial u}{2}} - \frac{n' \sin \left(i' + \frac{\partial i'}{2} \right)}{\cos \frac{\partial u'}{2}} \right)$$

mais de $n \sin i = n' \sin i'$ $n \sin \left(i + \frac{\partial i}{2} \right) = n' \sin \left(i' + \frac{\partial i'}{2} \right)$ on tire :

$$\begin{aligned}
 n \sin \left(i + \frac{\partial i}{2} \right) \cos \frac{\partial i}{2} &= n' \sin \left(i' + \frac{\partial i'}{2} \right) \cos \frac{\partial i'}{2} \\
 \Delta &= -\sigma n \sin \left(i + \frac{\partial i}{2} \right) \cos \frac{\partial i}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\partial u}{2} \cos \frac{\partial i}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\partial u'}{2} \cos \frac{\partial i'}{2}} \right) \\
 &= -\sigma \left(n \sin i \cos^2 \frac{\partial i}{2} + n \frac{\cos i}{2} \sin \partial i \right) \left(\frac{1}{\cos \frac{\partial u}{2} \cos \frac{\partial \omega - \partial u}{2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\cos \frac{\partial u'}{2} \cos \frac{\partial \omega - \partial u'}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

La 2^e parenthèse est du deuxième ordre en ∂u , on n'y conservera que les termes de cet ordre; dans la première nous conserverons les termes finis et les termes du premier ordre.

$$\text{Or } \frac{\sin(i - i')}{n \sin i} = \frac{\cos i'}{n} - \frac{\cos i}{n'} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{nn'} = \frac{\sin(u' - u)}{n \sin i}$$

$$n \sin i = \frac{nn' \sin(u' - u)}{n' \cos i' - n \cos i}$$

le terme fini est

$$\begin{aligned} & \frac{nn'(u' - u)}{n' - n} \\ \Delta = & -\sigma \left[\frac{nn'(u' - u)}{n' - n} \right. \\ & \left. + \frac{n}{2(n' - n)} (\partial\omega - \partial u) \right] \left(\frac{\partial u}{4} - \frac{\partial u'}{4} \right) (\partial u + \partial u' - \partial\omega) \end{aligned}$$

mais la relation différentielle $n \cos i (\partial\omega - \partial u) = n' \cos i' (\partial\omega - \partial u')$ donne $\partial\omega = \frac{n \cos i \partial u - n' \cos i' \partial u'}{n \cos i - n' \cos i'}$, $\partial\omega - \partial u = \frac{n' \cos i' (\partial u - \partial u')}{n \cos i - n' \cos i'}$

$$\partial u + \partial u' - \partial\omega = \frac{n \cos i \partial u' - n' \cos i' \partial u}{n \cos i - n' \cos i'}$$

avec l'approximation indiquée et en remplaçant

$$\sigma = -2 \operatorname{Rtg} \frac{\partial\omega}{2} \text{ par } -R \partial\omega \quad (R = \overline{IO})$$

$$\begin{aligned} \Delta = R & \frac{n \partial u - n' \partial u'}{n - n'} \left[\frac{nn'(u' - u)}{n' - n} \right. \\ & \left. + \frac{nn' \partial u - \partial u'}{2} \frac{n - n'}{n - n'} \right] \left(\frac{\partial u - \partial u'}{4} \right) \left(\frac{n \partial u' - n' \partial u}{n - n'} \right); \end{aligned}$$

en posant

$$k = R \frac{nn'}{n - n'}$$

$$\begin{aligned} \Delta = & -\frac{knn'(\gamma_0 - 1)(\gamma - 1)\left(\gamma - \frac{n}{n'}\right)\left(\gamma - \frac{n'}{n}\right)}{4(n - n')^2} u \partial u^3 \\ & - \frac{knn'(\gamma - 1)^2 \left(\gamma - \frac{n}{n'}\right)\left(\gamma - \frac{n'}{n}\right)}{8(n - n')^2} \partial u^4 \end{aligned}$$

la fonction de coma est donc

$$(13') \quad \Phi = -k \frac{nn'}{(n - n')^2} (\gamma_0 - 1)(\gamma - 1) \left(\gamma - \frac{n}{n'}\right) \left(\gamma - \frac{n'}{n}\right)$$

et on trouve bien comme coefficient de δu^4 , $\frac{1}{8}$ de la fonction d'aberration au point γ .

En dehors des points stigmatiques, on voit qu'il existe un point de Fermat qui correspond à $\gamma = 1$ et qui, par conséquent, n'est autre que la projection du centre du dioptré sur les rayons conjugués ($\gamma_i = 1$).

Pour terminer ce qui est relatif au dioptré sphérique, nous allons calculer les rayons de courbure des surfaces lieux des focales.

Rayons de courbure.

$$\begin{aligned} \text{Calculons } \gamma_s &= \frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{ns}{k_s} & \frac{1}{\gamma_s} &= \frac{\sin u}{\sin u'} + \frac{n's'}{k_s} \\ \text{avec } \frac{1}{k_s} &= \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{2} \left(\frac{1 - \gamma_0^2}{2} - B \right) \right] & B &= k \frac{n^2 + n'^2}{(n - n')^2} (\gamma_0 - 1)^2 \\ \gamma_s &= \gamma - \frac{u^2}{2} \left[\gamma_0^2 + \gamma \frac{(\gamma_0 - 1)^2 - 2}{2} + \frac{k (\gamma_0 - \gamma)^2}{n \rho_s} \right. \\ & \quad \left. + A \gamma_0 - \frac{2na}{k} + B (\gamma_0 - \gamma) \right] \quad [(9) (9')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mais } A \gamma_0 - \frac{2na}{k} + B \gamma_0 &= \frac{2nn'(\gamma_0 - 1)^2}{2(n - n')^2} \\ \gamma_s &= \gamma - \frac{u^2}{2} \left[\gamma_0^2 + \gamma \frac{(\gamma_0 - 1)^2 - 2}{2} + \frac{k (\gamma_0 - \gamma)^2}{n \rho_s} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2(n - n')^2} (2nn' - (n^2 + n'^2) \gamma) \right] \end{aligned}$$

le calcul de $\frac{1}{\gamma_s}$, conduit de la même façon, donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_s} &= \frac{1}{\gamma} - \frac{u^2}{2} \left[\frac{1 - \gamma_0^2}{2\gamma_0} + \frac{(\gamma_0 - 1)^2 - 2\gamma_0^2}{2} \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 \gamma} - \frac{k (\gamma_0 - \gamma)^2}{\gamma^2 n' \rho_s'} \right. \\ & \quad \left. - \left(A - \frac{2n'a'\gamma_0^2}{k} \right) - B \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 \gamma} \right] \end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned} A - \frac{2n'a'\gamma_0^2}{k} - B &= - \frac{2nn'(\gamma_0 - 1)^2}{2(n - n')^2} \\ \frac{1}{\gamma_s} &= \frac{1}{\gamma} - \frac{u^2}{2} \left[1 + \frac{1}{\gamma} \frac{(\gamma_0 - 1)^2 - 2\gamma_0^2}{2} - \frac{k (\gamma_0 - \gamma)^2}{\gamma^2 n' \rho_s'} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2(n - n')^2} \left(\frac{n^2 + n'^2}{\gamma} - 2nn' \right) \right] \end{aligned}$$

et en multipliant par $\gamma \gamma_s$

$$\gamma_s = \gamma + \frac{u^2}{2} \left[\gamma^2 + \gamma \frac{(\gamma_0 - 1)^2 - 2\gamma_0^2}{2} - \frac{k(\gamma_0 - \gamma)^2}{n' \rho'_s} - \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2(n - n')^2} \left((n^2 + n'^2) \gamma - 2nn'\gamma^2 \right) \right]$$

égayant les 2 valeurs de γ_s , on tire

$$\frac{1}{n \rho_s} - \frac{1}{n' \rho'_s} = -\frac{1}{k} - \frac{nn'(\gamma_0 - 1)^2 \left(\gamma - \frac{n}{n'} \right) \left(\gamma - \frac{n'}{n} \right)}{k(n - n')^2 (\gamma_0 - \gamma)^2} = -\frac{1}{k} + \frac{Q}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2}$$

pour avoir la différence $\frac{1}{n \rho_s} - \frac{1}{n' \rho'_s}$, il suffira, dans le calcul précédent, de remplacer B, $\mathcal{B}$, a , a' par 3 B, 3 $\mathcal{B}$, 3 a , 3 a' , et on obtient

$$\frac{1}{n \rho_s} - \frac{1}{n' \rho'_s} = -\frac{1}{k} - \frac{3nn'(\gamma_0 - 1)^2 \left(\gamma - \frac{n}{n'} \right) \left(\gamma - \frac{n'}{n} \right)}{k(n - n')^2 (\gamma_0 - \gamma)^2} = -\frac{1}{k} + \frac{3Q}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2}$$

tandis que $-\frac{1}{k} = V = \frac{1}{nR} - \frac{1}{n'R} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right)$

Nous allons maintenant établir les formules relatives à un dioptré dont la méridienne est une conique, et par conséquent qui contiennent les précédentes comme cas particulier.

Nous supposons que la conique est une ellipse; il est toujours facile de passer de ce cas à celui de la parabole ou de l'hyperbole.

Dioptré ellipsoïdal de révolution.

1^o CALCUL DE $\frac{1}{k_s}$, $\frac{1}{k_t}$. — Soient toujours PI, P'I (fig. 14) deux rayons conjugués dans la section principale du plan de la figure, a , b , les axes de l'ellipse et φ l'anomalie telle que $x = a \cos \varphi$,

$y = b \sin \varphi$; la normale au point I, fait avec l'axe un angle Ω lié à φ par $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \Omega$, et a une longueur ρ , telle que

$$\begin{aligned}\rho \sin \Omega &= b \sin \varphi = y \\ \rho \cos \Omega &= \frac{b^2}{a} \cos \varphi = \frac{b^2}{a^2} x \\ \frac{1}{k_s} &= \frac{\sin u'}{ns \sin u} - \frac{\sin u}{n's' \sin u'} = \frac{1}{y} \left(\frac{\sin u'}{n} - \frac{\sin u}{n'} \right) \\ &= \frac{1}{b \sin \varphi} \left(\frac{\sin u'}{n} - \frac{\sin u}{n'} \right),\end{aligned}$$

si on applique au point I la formule des focales sagittales.

D'autre part, $\Omega = i + u = i' + u'$

et $n \sin (\Omega - u) = n' \sin (\Omega - u')$ donne $\operatorname{tg} \Omega = \frac{n' \sin u' - n \sin u}{n' \cos u' - n \cos u}$

il en résulte avec l'approximation du deuxième ordre

$$\frac{\varphi}{1 - \frac{\varphi^2}{2}} = \frac{b}{a} \frac{n' u' - nu}{(n' - n) \left(1 - \frac{n' u'^2 - nu^2}{2(n' - n)} \right)}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{b}{a} \frac{n' u' - nu}{n' - n} \left(1 + \frac{n' u'^2 - nu^2}{2(n' - n)} - \frac{b^2}{2a^2} \frac{(n' u' - nu)^2}{(n' - n)^2} \right) \\ \frac{1}{k_s} &= \frac{a}{b^2} \frac{n' - n}{nn'} \left(1 - \frac{n' u'^2 - nu^2}{2(n' - n)} + \frac{b^2}{2a^2} \frac{(n' u' - nu)^2}{(n' - n)^2} \right)\end{aligned}$$

Or, $\frac{b^2}{a}$ est le rayon de courbure au sommet de l'ellipse, dès lors le k de l'approximation de Gauss est $-\frac{b^2}{a} \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right)$, (l'origine du rayon de courbure étant le sommet)

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{2(n' - n)} \left(n' \gamma_0^2 - n - \frac{b^2}{a^2} \frac{(n' \gamma_0 - n)^2}{(n' - n)} \right) \right]$$

en simplifiant et en remplaçant b^2 par $a^2 - c^2$, on obtient

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{2(n' - n)^2} \left(-nn'(\gamma_0 - 1)^2 + \frac{c^2}{a^2} (n' \gamma_0 - n)^2 \right) \right]$$

et enfin en ramenant à la forme adoptée pour le dioptré sphérique,

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{2} \left(\frac{\gamma_0 - 1}{2} - \frac{n^2 + n'^2}{2(n' - n)^2} (\gamma_0 - 1)^2 + \frac{c^2}{a^2} \frac{(n' \gamma_0 - n)^2}{(n' - n)^2} \right) \right]$$

qui, pour $c = 0$, redonne la formule relative au dioptré sphérique.

Le calcul de $\frac{1}{k_i}$ un peu plus compliqué, exigera l'expression du rayon de courbure au point I en fonction de l'anomalie

$$-R = \frac{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

ou, à l'approximation employée

$$\begin{aligned} -R &= \frac{(b^2 + c^2 \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{b^2}{a} \left(1 + \varphi^2 \frac{c^2}{b^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{b^2}{a} \left(1 + \frac{3}{2} \varphi^2 \frac{c^2}{b^2} \right) \\ -R &= \frac{b^2}{a} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{c^2}{b^2} \frac{b^2}{a^2} \frac{(nu - n'u')^2}{(n - n')^2} \right) = \frac{b^2}{a} \left(1 + u^2 \frac{3}{2} \frac{c^2}{a^2} \frac{(n - n' \gamma_0)^2}{(n - n')^2} \right) \end{aligned}$$

Cela posé, si Q et Q' sont les origines de l et l'

$$\frac{1}{k_i} = \frac{\partial u'}{n \overline{QI} \partial u} - \frac{\partial u}{n' \overline{Q'I} \partial u'}$$

$$\text{mais} \quad \overline{QI} \partial u = -R \partial \Omega \cos i \quad \overline{Q'I} \partial u' = -R \partial \Omega \cos i'$$

$$\frac{1}{k_i} = -\frac{1}{R d\Omega} \left(\frac{\partial u'}{n \cos(\Omega - u)} - \frac{\partial u}{n' \cos(\Omega - u')} \right);$$

la parenthèse deviendra, en conservant seulement les termes du 2^e ordre :

$$\frac{1}{nn'} \left[n' \partial u' - n \partial u + \frac{1}{2} [n' \partial u' (\Omega - u)^2 - n \partial u (\Omega - u')^2] \right]$$

Or, on a pris

$$\Omega = \frac{n'u' - nu}{n' - n} \quad \Omega - u = \frac{n'(u' - u)}{n' - n} \quad \Omega - u' = \frac{n(u' - u)}{n' - n}$$

la parenthèse deviendra donc

$$\frac{n' \partial u' - n \partial u}{nn'} \left(1 + (u - u')^2 \frac{n'^2 \partial u' - n^2 \partial u}{2(n' - n)^2 (n' \partial u' - n \partial u)} \right)$$

ou

$$\frac{n'\partial u' - n\partial u}{nn'} \left(1 + \frac{u^2}{2(n-n')^2} (\gamma_0 - 1)^2 \frac{n'\gamma_0 - n^3}{n'\gamma_0 - n} \right).$$

Calculons $\partial\Omega$ à partir de $\operatorname{tg} \Omega = \frac{n' \sin u' - n \sin u}{n' \cos u' - n \cos u}$

$$\frac{\partial\Omega}{\cos^2 \Omega} = \frac{(n'\partial u' - n\partial u)(n' - n) + nn'(\partial u + \partial u')[1 - \cos(u - u')]}{(n' \cos u' - n \cos u)^2}$$

$$\begin{aligned} \partial\Omega &= \frac{(n'\partial u' - n\partial u)(n' - n) + nn'(\partial u + \partial u')[1 - \cos(u - u')]}{(n' - n)^2 + 2nn'[1 - \cos(u - u')]} \\ &= \frac{n'\partial u' - n\partial u}{n' - n} \left(1 + \frac{nn'(u - u')^2(\partial u + \partial u')}{2(n' - n)(n'\partial u' - n\partial u)} - \frac{nn'(u - u')^2}{(n' - n)^2} \right) \end{aligned}$$

et, comme dans le terme du second ordre, on peut confondre

$\frac{\partial u'}{\partial u}$ et $\frac{u'}{u}$ avec γ_0

$$\begin{aligned} \partial\Omega &= \frac{n'\partial u' - n\partial u}{n' - n} \left[1 + \frac{u^2}{2} \frac{nn'}{n' - n} \left(\frac{(1 - \gamma_0)^2(1 + \gamma_0)}{n'\gamma_0 - n} - \frac{2(1 - \gamma_0)^2}{n' - n} \right) \right] \\ &= \frac{n'\partial u' - n\partial u}{n' - n} \left[1 + \frac{u^2}{2} \frac{nn'}{(n' - n)^2} \frac{(n' + n)(1 - \gamma_0)^3}{n'\gamma_0 - n} \right] \\ - \frac{1}{R\partial\Omega} &= \frac{a}{b^2} \frac{n' - n}{n'\partial u' - n\partial u} \left[1 - \frac{u^2}{2} \left(\frac{nn'(n' + n)(1 - \gamma_0)^3}{(n' - n)^2(n'\gamma_0 - n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3 \frac{c^2(n - n'\gamma_0)^2}{a^2(n - n')^2} \right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_i} &= \frac{a}{b^2} \frac{n' - n}{nn'} \left[1 - \frac{u^2}{2(n' - n)^2} \right. \\ &\quad \left. \left(-(n^2 + nn' + n'^2)(\gamma_0 - 1)^2 + 3 \frac{c^2}{a^2}(n'\gamma_0 - n)^2 \right) \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_i} &= \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{2} \left(\frac{\gamma_0 - 1}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 3 \frac{n^2 + n'^2}{2(n - n')^2} (\gamma_0 - 1)^2 + 3 \frac{c^2}{a^2} \frac{(n'\gamma_0 - n)^2}{(n - n')^2} \right] \end{aligned}$$

de telle sorte que nous obtenons bien $\frac{1}{k_s}$ et $\frac{1}{k_i}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_s} &= \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{2} \left(\frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2} - B \right) \right] \\ \frac{1}{k_i} &= \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{2} \left(\frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2} - 3B \right) \right] \end{aligned}$$

où

$$B = \frac{n^2 + n'^2}{2(n - n')^2} (\gamma_0 - 1)^2 - \frac{c^2 (n' \gamma_0 - n)^2}{a^2 (n - n')^2}.$$

Fonction d'aberration.

Les valeurs de k_s et de k_l permettent, par un calcul en tout semblable à celui du dioptré sphérique, l'établissement de la fonction d'aberration et de la fonction d'astigmatisme.

$\mathcal{A}$ et B ayant les valeurs qui conviennent au dioptré à section elliptique

$$\begin{aligned} \frac{2na}{k} &= \mathcal{A} \gamma_0 + B \left(\gamma_0 - \frac{n}{n'} \right) - \frac{n}{n'} \frac{n'^2 - n^2}{2(n' - n)^2} (\gamma_0 - 1)^2 \\ \frac{2n'a' \gamma_0^2}{k} &= \frac{\mathcal{A}}{\gamma_0} + B \left(\frac{n'}{n} - \frac{1}{\gamma_0} \right) - \frac{n'}{n} \frac{n'^2 - n^2}{2(n' - n)^2} (\gamma_0 - 1)^2 \end{aligned}$$

l'élimination de $\mathcal{A}$ conduira donc à

$$\begin{aligned} (14'') \quad P &= 2na - 2n'a' \gamma_0^4 \\ &= - \frac{k}{(n' - n)^2} \left[(\gamma_0 - 1)^2 (n \gamma_0 - n') (n' \gamma_0 - n) - \frac{c^2 (n' \gamma_0 - n)^4}{a^2 nn'} \right] \end{aligned}$$

Les équations précédentes fourniraient aisément deux valeurs de $\mathcal{A}$, et une troisième assez intéressante, par élimination de B .

L'expression de P montre que $\gamma_0 = 1$, $\gamma_0 = \frac{n'}{n}$, ne sont pas racines de l'équation $P = 0$; seul, le sommet du dioptré conserve son stigmatisme.

Fonction d'astigmatisme.

On utilisera les formules établies pour les dioptrés sphériques

$$\begin{aligned} 2nzu^2 &= k (\gamma_s - \gamma_l) + (k_s - k_l) \left(\gamma - \frac{n}{n'} \right) - k \frac{n}{n'} \left(1 - \frac{\cos i}{\cos i'} \right) \\ 2n'z'u^2 \gamma_0^2 &= k \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_s} \right) + (k_s - k_l) \left(\frac{n'}{n} - \frac{1}{\gamma} \right) - k \frac{n'}{n} \left(\frac{\cos i'}{\cos i} - 1 \right) \\ 1 - \frac{\cos i}{\cos i'} &\text{ a la même expression que pour le dioptré sphérique} \end{aligned}$$

il suffit de le calculer sous la forme

$$\frac{\cos(\Omega - u') - \cos(\Omega - u)}{\cos(\Omega - u')} \text{ avec } \operatorname{tg} \Omega = \frac{n' \sin u' - n \sin u}{n' \cos u' - n \cos u}$$

et on trouve $\frac{u^2}{2} \frac{n' + n}{n' - n} (\gamma_0 - 1)^2$; de même, pour l'autre différence, l'élimination de $\gamma_s - \gamma_t$ et la remarque que $k_s - k_t = k B u^2$ conduisent à :

$$(12') \quad Q = 2n\alpha - 2n'\alpha'\gamma_0^2\gamma^2 = -\frac{k}{(n' - n)^2} \left[(\gamma_0 - 1)^2 (n\gamma - n') (n'\gamma - n) - \frac{c^2}{a^2} \frac{(n'\gamma_0 - n)^2 (n'\gamma - n)^2}{nn'} \right]$$

$\gamma = \frac{n'}{n}$ n'est plus une surface de Petzval que si $\gamma_0 = \frac{n}{n'}$.

Distorsion.

Le calcul de $\gamma_s - \gamma_t$ peut s'effectuer dans l'hypothèse où $\alpha = 0$, avec la formule

$$(15') \quad \frac{D}{2} = \frac{k(\gamma_s - \gamma_t)}{u^2} = -k \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{2(n' - n)^2} \left[(n^2 + n'^2) \gamma - 2nn' \right] + k \frac{c^2}{a^2} \frac{(n'\gamma_0 - n)^2 (n'\gamma - n)}{n' (n - n')^2}$$

qui donnerait la position de l'unique point, ou de l'unique surface, correspondant à une égale dilatation.

Pour $\gamma_0 = 1$, $\gamma_s - \gamma_t$ constamment nul dans le dioptré sphérique, n'est plus nul sinon pour $\gamma = \frac{n}{n'}$, c'est-à-dire à la surface de séparation; pour $\gamma_0 = \frac{n}{n'}$ le point sans distorsion est $\gamma = \frac{2nn}{n^2 + n'^2}$, (cette valeur convient, quel que soit γ_0 pour le dioptré sphérique).

Fonction de coma.

Nous avons toujours à calculer $\Delta = n(TJ - TI) - n'(T'J - T'I)$, les normales en I et J se coupent en O et $IOJ = 2\omega^{(1)}$; le triangle IOJ

(1) $\Omega = \omega$.

n'est pas isocèle et la perpendiculaire abaissée de O sur IJ fait avec OI l'angle $\delta\omega_1$; l'angle avec OJ est $\delta\omega_2 = \delta\omega - \delta\omega_1$.

Pour calculer TJ.—TI, nous posons toujours IJ = σ et

$$\begin{aligned} \frac{TJ}{\cos(i + \delta\omega_1)} &= \frac{TI}{\cos(i + \delta i - \delta\omega_2)} = \frac{\sigma}{\sin \delta u} \\ &= \frac{TJ - TI}{2 \sin\left(\frac{\delta i}{2} - \frac{\delta\omega}{2}\right) \sin\left(i + \frac{\delta i}{2} + \frac{\delta\omega_1 - \delta\omega_2}{2}\right)} \end{aligned}$$

et à cause de $\delta u = \delta\omega - \delta i$

$$TJ - TI = - \frac{\sigma \sin\left(i + \frac{\delta i}{2} + \delta\omega_1 - \frac{\delta\omega}{2}\right)}{\cos \frac{\delta u}{2}}$$

et de même

$$T'J - T'I = - \frac{\sigma \sin\left(i' + \frac{\delta i'}{2} + \delta\omega_1 - \frac{\delta\omega}{2}\right)}{\cos \frac{\delta u'}{2}}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta = -\sigma &\left[\frac{n \sin\left(i + \frac{\delta i}{2}\right)}{\cos \frac{\delta u}{2}} - \frac{n' \sin\left(i' + \frac{\delta i'}{2}\right)}{\cos \frac{\delta u'}{2}} \right] \cos\left(\delta\omega_1 - \frac{\delta\omega}{2}\right) \\ &- \sigma \left[\frac{n \cos\left(i + \frac{\delta i}{2}\right)}{\cos \frac{\delta u}{2}} - \frac{n' \cos\left(i' + \frac{\delta i'}{2}\right)}{\cos \frac{\delta u'}{2}} \right] \sin\left(\delta\omega_1 - \frac{\delta\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

la première parenthèse n'est autre chose que la valeur de Δ dans le dioptré sphérique, son développement nous donnera les termes en $u\delta u^3$ et δu^4 déjà trouvés, de plus le facteur de la parenthèse ne diffère de l'unité que d'une quantité de 2^e ordre; donc, le premier terme nous fournit pour Δ la valeur trouvée pour le dioptré sphérique; le deuxième terme fournira la quantité qui, dans Δ , dépend de la forme de la courbe.

De ce terme, calculons $\sin\left(\delta\omega_1 - \frac{\delta\omega}{2}\right)$.

Les deux points I et J correspondent aux valeurs φ et $\varphi + \partial\varphi$ de l'anomalie

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \quad \operatorname{tg} (\omega + \partial\omega) = \frac{a}{b} \operatorname{tg} (\varphi + \partial\varphi)$$

$$\begin{aligned} \text{conduit à} \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \partial\omega} &= \frac{b}{a \operatorname{tg} \partial\varphi} \frac{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\partial\varphi}{2}} \left(\frac{b}{a} \cos^2 \varphi + \frac{a}{b} \sin^2 \varphi \right) + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

Si on exprime que la droite qui fait avec l'axe l'angle $\omega + \partial\omega_1$ est perpendiculaire à IJ, on a :

$$\operatorname{tg} (\omega + \partial\omega_1) = - \frac{a [\cos (\varphi + \partial\varphi) - \cos \varphi]}{b [\sin (\varphi + \partial\varphi) - \sin \varphi]}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tg} \partial\omega_1} &= \frac{b}{a \operatorname{tg} \frac{\partial\varphi}{2}} \frac{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\partial\varphi}{2}} \left(\frac{b}{a} \cos^2 \varphi + \frac{a}{b} \sin^2 \varphi \right) + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

si on pose

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{b}{a} \cos^2 \varphi + \frac{a}{b} \sin^2 \varphi & \beta &= \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{1}{\operatorname{tg} \partial\omega_1} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\partial\varphi}{2}} \alpha + \beta & \text{or} \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \partial\omega} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \partial\varphi} \alpha + \beta \end{aligned}$$

de cette dernière, on déduit :

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\partial\omega}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\partial\omega}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\partial\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\partial\varphi}{2}} \alpha + 2\beta$$

ou approximativement

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\delta \omega}{2}} &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\delta \varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta \varphi}{2}} \alpha + 2\beta + \frac{1}{\alpha \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\delta \varphi}{2} \right) : \operatorname{tg} \frac{\delta \varphi}{2} + \beta} \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\delta \varphi}{2}} \alpha + 2\beta - \alpha \operatorname{tg} \frac{\delta \varphi}{2} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\delta \varphi}{2} \\ \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\delta \omega}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\delta \omega_1}{2}} &= \beta - \operatorname{tg} \frac{\delta \varphi}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\delta \omega}{2} - \delta \omega_1 \right) &= \sin \delta \omega_1 \sin \frac{\delta \omega}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \sin \delta \omega_1 \sin \frac{\delta \omega}{2} \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \end{aligned}$$

Si on remplace σ par $-R \delta \omega$, le second terme de Δ devient

$$+ \frac{u \delta u^3}{4} \frac{k}{(n' - n)^2} (n' \gamma - n)^3 (n' \gamma_0 - n) \frac{c^2}{a^2} + \frac{\delta u^4}{8} \frac{k}{(n' - n)^2} (n' \gamma - n)^4 \frac{c^2}{a^2}$$

Au total, on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= - \frac{u \delta u^3}{4} \left\{ \frac{k n n'}{(n' - n)^2} \left[(\gamma_0 - 1) (\gamma - 1) \left(\gamma - \frac{n'}{n} \right) \left(\gamma - \frac{n}{n'} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{c^2}{a^2} (n' \gamma_0 - n) \frac{(n' \gamma - n)^3}{n^2 n'^2} \right] \right\} \\ &- \frac{\delta u^4}{8} \left\{ \frac{k n n'}{(n' - n)^2} \left[(\gamma - 1)^2 \left(\gamma - \frac{n}{n'} \right) \left(\gamma - \frac{n'}{n} \right) - \frac{c^2}{a^2} \frac{(n' \gamma - n)^4}{n^2 n'^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

On reconnaît dans le coefficient de $\frac{du^4}{8}$ la fonction d'aberration au point γ : quant à la fonction de coma, son expression est

$$(13'') \quad \Phi = - \frac{k n n'}{(n' - n)^2} \left[(\gamma_0 - 1) (\gamma - 1) \left(\gamma - \frac{n}{n'} \right) \left(\gamma - \frac{n'}{n} \right) - \frac{c^2}{a^2} \frac{(n' \gamma - n)^3 (n' \gamma_0 - n)}{n' n^2} \right]$$

les points de la surface $\gamma = \frac{n}{n'}$ sont dépourvus de coma ; le coma n'est pas nul pour $\gamma = 1$ et $\gamma = \frac{n'}{n}$, sauf si $\gamma_0 = \frac{n}{n'}$.

Rayons de courbure.

L'expression des différences $\frac{1}{n\varphi_s} - \frac{1}{n'\varphi'_s}$, $\frac{1}{n\varphi_t} - \frac{1}{n'\varphi'_t}$, subit une modification analogue aux précédentes, on a en prenant :

$$B = \frac{n^2 + n'^2}{2(n' - n)^2} (\gamma_0 - 1)^2 - \frac{c^2 (n'\gamma_0 - n)^2}{a^2 (n - n')^2},$$

$$\frac{2na}{k} = A\gamma_0 + B \left(\gamma_0 - \frac{n}{n'} \right) - \frac{n}{n'} \frac{n'^2 - n^2}{2(n - n')^2} (\gamma_0 - 1)^2$$

$$\frac{2n'a'\gamma_0^2}{k} = A + B \left(\frac{n'}{n} - \frac{1}{\gamma_0} \right) - \frac{n'}{n} \frac{n'^2 - n^2}{2(n - n')^2} (\gamma_0 - 1)^2;$$

en portant dans les expressions de γ_s et de $\frac{1}{\gamma_s}$, les formules de ces quantités ne changent pas, seule la valeur de B a changé et le calcul donne

$$\frac{1}{n\varphi_s} - \frac{1}{n'\varphi'_s} = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \times \frac{nn'(\gamma_0 - 1)^2 \left(\gamma - \frac{n}{n'} \right) \left(\gamma - \frac{n'}{n} \right) - \frac{c^2 (n'\gamma_0 - n)^2 (n'\gamma - n)}{a^2 nn'}}{(n - n')^2 (\gamma_0 - \gamma)^2}$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{n\varphi_s} - \frac{1}{n'\varphi'_s} = -\frac{1}{k} + \frac{Q}{k^2 (\gamma_0 - \gamma)^2}$$

et l'on aurait évidemment sans difficulté

$$\frac{1}{n\varphi_t} - \frac{1}{n'\varphi'_t} = -\frac{1}{k} + \frac{3Q}{k^2 (\gamma_0 - \gamma)^2}$$

les formules qui conviennent au dioptré de section elliptique, ne se distinguent, que par l'adjonction d'un terme en $\frac{c^2}{a^2}$, des fonctions étudiées pour le dioptré sphérique.

CHAPITRE VII

Calcul des paramètres.

Vérification des formes adoptées pour les fonctions, dans le cas où les dioptrés ont pour section une conique.

1^o FORME DE LA FONCTION.— Pour un dioptré, la fonction d'aberration est du 4^e degré en γ_0 — la fonction d'astigmatisme du 2^e degré en γ et du 2^e degré en γ_0 — la fonction de coma du 1^{er} degré en γ_0 et du 3^e degré en γ — on aura :

$$\begin{aligned} 2na - 2n'a'\gamma'_0 &= F_4(\gamma_0) \\ 2nx - 2n'x'\gamma_0^2\gamma'^2 &= F_{2,2}(\gamma_0\gamma) \\ 2n\varphi - 2n'\varphi'\gamma_0\gamma'^3 &= F_{1,3}(\gamma_0\gamma) \end{aligned}$$

pour un deuxième dioptré, nous aurons de même :

$$\begin{aligned} 2n'a'' - 2n''a'''\gamma_0'^4 &= F_4'(\gamma_0') \\ 2n'x' - 2n''x'''\gamma_0'^2\gamma'^2 &= F_{2,2}'(\gamma_0'\gamma') \\ 2n'\varphi' - 2n''\varphi'''\gamma_0'\gamma'^3 &= F_{1,3}'(\gamma_0'\gamma') \end{aligned}$$

On en tirera, par une élimination évidente :

$$\begin{aligned} 2na - 2n'a''\gamma_0'\gamma_0'^4 &= F_4(\gamma_0) + \gamma_0'\gamma_0'^4 \frac{F_4'(\gamma_0')}{\gamma_0'^4} \\ 2nx - 2n'a''\gamma_0'^2\gamma'^2\gamma_0'^2\gamma'^2 &= F_{2,2}(\gamma_0\gamma) + \gamma_0'\gamma_0'^2\gamma'^2\gamma_0'^2\gamma'^2 \frac{F_{2,2}'(\gamma_0'\gamma')}{\gamma_0'^2\gamma'^2} \\ 2n\varphi - 2n'\varphi''\gamma_0'\gamma_0'^3\gamma'^3 &= F_{1,3}(\gamma_0\gamma) + \gamma_0'\gamma_0'\gamma_0'^3\gamma'^3 \frac{F_{1,3}'(\gamma_0'\gamma')}{\gamma_0'\gamma'^3} \end{aligned}$$

Or, dans le système résultant, ainsi envisagé, si on désigne par $\Gamma_0 = \gamma_0\gamma'_0$ et $\Gamma = \gamma\gamma'$ les nouveaux rapports de convergence, nous avons vu que :

$$\gamma_0 = \Gamma_0 \frac{K}{k} + \frac{K}{k'} \quad \gamma = \Gamma \frac{K}{k} + \frac{K}{k'} \quad \frac{1}{\gamma_0} = \frac{K}{k} + \frac{1}{\Gamma_0} \frac{K}{k'} \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{K}{k} + \frac{1}{\Gamma} \frac{K}{k'}$$

si k et k' sont les constantes des deux systèmes combinés et K la constante du système résultant.

La substitution linéaire n'altère pas les fonctions F_4, F_{13}, F_{22} , dans leur forme; les fonctions $\frac{F'_4}{\gamma_0'^4}, \frac{F'_{13}}{\gamma_0' \gamma_0'^3}, \frac{F'_{22}}{\gamma_0'^2 \gamma_0'^2}$ conservent également leur forme et les produits par les puissances convenables des rapports de convergence du système total les ramènent à la forme des premières, dès lors on a :

$$\begin{aligned} 2na - 2n'a''\Gamma_0^4 &= \Phi_4(\Gamma_0) \\ 2nx - 2n''\alpha''\Gamma_0^3\Gamma^2 &= \Phi_{2.2}(\Gamma_0\Gamma) \\ 2n\varphi - 2n''\varphi''\Gamma_0\Gamma^3 &= \Phi_{1.3}(\Gamma_0\Gamma) \end{aligned}$$

Il est visible que l'on peut raisonner de la même manière pour le système qui résulterait de l'adjonction d'un 3^e dioptré, et une élimination de proche en proche conduirait à des relations de même forme, et c'est une première justification de formes employées pour les fonctions générales :

$$\begin{aligned} 2na - 2n'a'\gamma_0^4 &= P \\ 2nx - 2n'\alpha'\gamma_0^2\gamma^2 &= Q \\ 2n\varphi - 2n'\varphi'\gamma_0\gamma^3 &= \Phi. \end{aligned}$$

2^o CALCUL DES PARAMÈTRES.— Il paraît évidemment plus simple, quand on effectuera le calcul de proche en proche, d'employer la fonction d'aberration où les cinq paramètres sont à peu près en évidence; mais si on fait le calcul pour la fonction d'astigmatisme ou la fonction de coma, on pourra justifier les valeurs que nous avons adoptées pour les coefficients de ces fonctions; pour cela, il suffit de conduire l'élimination en mettant en évidence les formes qui se conservent.

Fonction d'astigmatisme :

$$Q = - \frac{knn'}{(n - n')^2} \left[(\gamma_0 - 1)^2 \left(\gamma^2 - \left(\frac{n'}{n} + \frac{n}{n'} \right) + 1 \right) - \frac{n'^2 c^2}{n^2 a^2} \left(\gamma_0 - \frac{n}{n'} \right)^2 \left(\gamma - \frac{n}{n'} \right)^2 \right]$$

et, en posant :

$$f = - \frac{nn'}{(n - n')^2} \quad \frac{n}{n'} + \frac{n'}{n} = \frac{2f - 1}{f}$$

$$Q = kf \left[(\gamma_0 - 1)^2 (\gamma - 1)^2 - \frac{n'^2 c^2}{n^2 a^2} \left(\gamma_0 - \frac{n}{n'} \right)^2 \left(\gamma - \frac{n}{n'} \right)^2 \right] + k\gamma (\gamma_0 - 1)^2$$

pour le 2^e dioptré :

$$\frac{Q'}{\gamma_0'^2 \gamma'^2} = k' \gamma' \left[\left(\frac{1}{\gamma_0'} - 1 \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma'} - 1 \right)^2 - \frac{n'^2 c'^2}{n''^2 a'^2} \left(\frac{1}{\gamma_0'} - \frac{n''}{n'} \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma'} - \frac{n''}{n'} \right)^2 \right] + k' \gamma' \frac{(\gamma_0' - 1)^2}{\gamma_0'^2 \gamma'^2}$$

Le terme en f est symétrique en γ_0 et γ , on peut le regarder comme une fonction de $\gamma_0 + \gamma$ et de $\gamma_0 \gamma$; or :

$$\gamma + \gamma_0 = K \left(\frac{\Gamma + \Gamma_0}{k} + \frac{2}{k'} \right) \quad \gamma_0 \gamma = K^2 \left(\frac{\Gamma \Gamma_0}{k^2} + \frac{\Gamma + \Gamma_0}{k k'} + \frac{1}{k_2^2} \right)$$

La substitution dans les carrés, n'altérera pas la forme linéaire en $\Gamma \Gamma_0$ et $(\Gamma + \Gamma_0)$; d'ailleurs, si on remarque que chacun des carrés s'écrit :

$$\begin{aligned} [p\Gamma_0 + q]^2 [p\Gamma + q]^2 &= p^4 \Gamma_0^2 \Gamma^2 + 2p^3 q [\Gamma_0^2 \Gamma + \Gamma_0 \Gamma^2] \\ &\quad + p^2 q^2 [\Gamma_0^2 + 4\Gamma_0 \Gamma + \Gamma^2] + 2pq^3 [\Gamma_0 + \Gamma] + q^4; \end{aligned}$$

on verra que l'expression du 2^e degré ne pourra présenter que cinq coefficients distincts. On trouvera un résultat tout à fait semblable, pour le terme introduit par le second dioptré

$$\left(p' + \frac{q'}{\Gamma_0} \right)^2 \left(p' + \frac{q'}{\Gamma} \right)^2 - \left(p'^2 + p'q' \left(\frac{1}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma_0} \right) + \frac{q'^2}{\Gamma \Gamma_0} \right)^2$$

et, en multipliant par $\Gamma^2 \Gamma_0^2$ on retrouve exactement la même forme à cinq coefficients; la somme de ces expressions demeure donc une expression du second degré en Γ_0 et en Γ ne comportant que cinq coefficients distincts.

Le terme complémentaire $k\gamma(\gamma_0 - 1)^2 + \Gamma_0^2 \Gamma k' \frac{1}{\gamma'} \left(\frac{1}{\gamma_0'} - 1 \right)^2$ devient :

$$\begin{aligned} \gamma [k(\gamma_0 - 1)^2 + k' \Gamma (\Gamma_0 - \gamma_0)] &= K \left(\frac{\Gamma}{k} + \frac{1}{k'} \right) \left\{ k \left(\frac{K\Gamma_0}{k} + \frac{K}{k'} - 1 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + k' \Gamma \left[\Gamma_0 \left(1 - \frac{K}{k} \right) - \frac{K}{k'} \right] \right\} \\ &= K \left\{ \Gamma \Gamma_0^2 \left(1 - \frac{K}{k} \right)^2 \frac{k'}{k} + 2\Gamma_0 \Gamma^2 \frac{K}{k} \left(\frac{K}{k} - 1 \right) + \Gamma \Gamma_0^2 \left[2 \frac{K}{k} \left(\frac{K}{k} - 1 \right) + 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \Gamma^2 \frac{K^2}{k k'} + \frac{\Gamma_0^2 K^2}{k k'} + \Gamma_0 \Gamma \left[4 \frac{K^2}{k k'} - 2K \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) \right] + \Gamma \left[2 \frac{K}{k'} \left(\frac{K}{k'} - 1 \right) + 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + 2\Gamma_0 \frac{K}{k'} \left(\frac{K}{k'} - 1 \right) + \frac{k}{k'} \left(1 - \frac{K}{k} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Dans le terme principal, les termes du 3^e degré et du 1^{er} degré ont, respectivement, des coefficients égaux; dans le terme complémentaire, ils diffèrent d'une unité; les termes en Γ^2 , Γ_0^2 ayant partout des coefficients égaux, cette égalité se conserve dans la somme, tandis que la différence d'une unité se retrouvera dans la somme, pour les termes du 3^e degré et pour ceux du 1^{er} degré; enfin, pour le terme en $\Gamma_0\Gamma$, il aura pour coefficient le quadruple du coefficient de Γ^2 augmenté de $2KV$, si on remarque que :

$$V = -\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'}\right);$$

il en résulte que l'on pourra écrire Q avec 5 coefficients

$$Q = K \left[a_2 \Gamma^2 \Gamma_0^2 + (2b_2 - 1) \Gamma_0 \Gamma^2 + 2b_2 \Gamma_0^2 \Gamma + \frac{b_1 - KV}{2} \Gamma^2 + 2b_1 \Gamma_0 \Gamma \right. \\ \left. + \frac{b_1 - KV}{2} \Gamma_0^2 + 2b_0 \Gamma + (2b_0 - 1) \Gamma_0 + C_0 \right]$$

Cette forme est visiblement identique à la forme générale adoptée, il suffit de poser :

$$A_2 = Ka_2 \quad C_0 = Kc_0 \quad B_2 = 2Kb_2 \quad B_1 = 2Kb_1 \quad B_0 = 2Kb_0.$$

On démontrera la généralité de la formule ainsi établie, si, l'admettant pour un système quelconque, et pour un deuxième, que l'on juxtapose au premier, l'élimination des rapports de convergence individuels en fonction des rapports de convergence du système résultant redonne la même forme de fonction; on posera :

$$Q = k \left[a_2 \gamma^2 \gamma_0^2 + (2b_2 - 1) \gamma_0 \gamma^2 + 2b_2 \gamma \gamma_0^2 + \frac{b_1 - kv}{2} \gamma^2 + 2b_1 \gamma_0 \gamma \right. \\ \left. + \frac{b_1 - kv}{2} \gamma_0^2 + 2b_0 \gamma + (2b_0 - 1) \gamma_0 + c_0 \right] \\ \frac{Q'}{\gamma_0'^2 \gamma'^2} = k' \left[a'_2 + (2b'_2 - 1) \frac{1}{\gamma_0'} + 2b'_2 \frac{1}{\gamma'} + \frac{b'_1 - k'v'}{2} \frac{1}{\gamma_0'^2} + 2b'_1 \frac{1}{\gamma_0' \gamma'} \right. \\ \left. + \frac{b'_1 - k'v'}{2} \frac{1}{\gamma'^2} + 2b'_0 \frac{1}{\gamma' \gamma_0'^2} + (2b'_0 - 1) \frac{1}{\gamma_0' \gamma'^2} + \frac{c'_0}{\gamma_0'^2 \gamma'^2} \right]$$

On forme $Q = Q + \Gamma_0^2 \Gamma^2 \frac{Q'}{\gamma_0'^2 \gamma'^2}$ avec la valeur déjà indiquée, des

rapports de convergence partiels, l'élimination ne présente d'autre difficulté que la longueur du calcul, et on trouve :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q} = & \Gamma_0^2 \Gamma^2 \left[k' a'_2 + (4 b'_2 - 1) K \frac{k'}{k} + (3 b'_1 - k' v') K^2 \frac{k'}{k^2} \right. \\
 & \left. + (4 b'_0 - 1) K^3 \frac{k'}{k^3} + (k a_2 + k' c'_0) \frac{K^4}{k^4} \right] \\
 + & \Gamma_0 \Gamma^2 \left[(2 b'_2 - 1) K + (3 b'_1 - k' v') \frac{K^2}{k} + (6 b'_0 - 1) \frac{K^3}{k^2} \right. \\
 & \left. + 2 a_2 \frac{K^4}{k^2 k'} + 2 c'_0 \frac{K^4}{k^3} + (2 b_2 - 1) \frac{K^3}{k^2} \right] \\
 + & \Gamma_0^2 \Gamma \left[2 b'_2 K + (3 b'_1 - k' v') \frac{K^2}{k} + (6 b'_0 - 2) \frac{K^3}{k^2} + 2 a_2 \frac{K^4}{k^2 k'} \right. \\
 & \left. + 2 c'_0 \frac{K^4}{k^3} + 2 b_2 \frac{K^3}{k^2} \right] \\
 + & \Gamma^2 \left[\frac{b'_1 - k' v'}{2} \frac{K^2}{k'} + 2 b'_0 \frac{K^3}{k k'} + c'_0 \frac{K^4}{k^2 k'} + a_2 \frac{K^4}{k k'^2} \right. \\
 & \left. + (2 b_2 - 1) \frac{K^3}{k k'} + 2 b_1 \frac{K^2}{k} \right] \\
 + & \Gamma_0 \Gamma \left[2 b'_1 \frac{K^2}{k'} + (8 b'_0 - 2) \frac{K^3}{k k'} + 4 c'_0 \frac{K^4}{k^2 k'} + 4 a_2 \frac{K^4}{k k'^2} \right. \\
 & \left. + (8 b_2 - 2) \frac{K^3}{k k'} + 2 b_1 \frac{K^2}{k} \right] \\
 + & \Gamma_0^2 \left[\frac{b'_1 - k' v'}{2} \frac{K^2}{k'} + (2 b'_0 - 1) \frac{K^3}{k k'} + c'_0 \frac{K^4}{k^2 k'} + a_2 \frac{K^4}{k k'^2} \right. \\
 & \left. + 2 b_2 \frac{K^3}{k k'} + \frac{b_1 - k v}{2} \frac{K^2}{k} \right] \\
 + & \Gamma \left[2 b'_0 \frac{K^3}{k'^2} + 2 c'_0 \frac{K^4}{k k'^2} + 2 a_2 \frac{K^4}{k'^3} + (6 b_2 - 2) \frac{K^3}{k'^2} \right. \\
 & \left. + (3 b_1 - k v) \frac{K^2}{k'} + 2 b_0 K \right] \\
 + & \Gamma_0 \left[(2 b'_0 - 1) \frac{K^3}{k'^2} + 2 c'_0 \frac{K^4}{k k'^2} + 2 a_2 \frac{K^4}{k'^3} + (6 b_2 - 1) \frac{K^3}{k'^2} \right. \\
 & \left. + (3 b_1 - k v) \frac{K^2}{k'} + (2 b_0 - 1) K \right] \\
 + & (k' c'_0 + k a_2) \frac{K^4}{k'^4} + (4 b_2 - 1) \frac{K^3 k}{k'^3} + (3 b_1 - k v) K^2 \frac{k}{k'^2} \\
 & + (4 b_0 - 1) K \frac{k}{k'} + k c_0
 \end{aligned}$$

Les coefficients de $\mathcal{Q}$ offrent les mêmes relations mutuelles que ceux de $\mathcal{Q}$; on verra plus particulièrement que le coefficient de $\Gamma_0 \Gamma$ étant pris égal à $2 \beta_1 K$, ceux de Γ_0^2 et de Γ^2 sont

$$\frac{K\beta_1}{2} - \frac{K^2}{2} (v + v') = K \frac{\beta_1 - KV}{2}$$

puisque par la définition même de V , $V = v + v'$.

Nous retrouvons ainsi la forme adoptée pour la fonction d'astigmatisme, et la formule précédente montre aisément comment les coefficients : $A_2 B_2 B_1 B_0 C_0$ sont liés à $a_2 b_2 b_1 b_0 c_0$ et $a'_2 b'_2 b'_1 b'_0 c'_0$

Fonction de coma.

On pourrait, pour deux dioptries formant un système centré, faire un calcul de la fonction de coma, qui conduirait à une forme ne contenant que les cinq paramètres de la fonction d'aberration; mais cette vérification est un peu surrogatoire, et il est plus simple, puisque la fonction de coma du dioptré a assurément la forme requise, de prendre pour la fonction Φ_1 , en conservant les mêmes notations :

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \Phi + \Gamma_0 \Gamma^3 \frac{\Phi'}{\gamma_0 \gamma^3} = k \left\{ a_2 \gamma_0 \gamma^3 + \left(b_2 - \frac{1}{2} \right) \gamma^3 + \left(3 b_2 - \frac{1}{2} \right) \gamma_0 \gamma^2 \right. \\ + \left(\frac{3 b_1}{2} - \frac{kv}{2} \right) \gamma^2 + \left(\frac{3 b_1}{2} - \frac{kv}{2} \right) \gamma_0 \gamma + \left(3 b_0 - \frac{1}{2} \right) \gamma + \left(b_0 - \frac{1}{2} \right) \gamma_0 \\ \left. + c_0 \right\} + k' \left\{ a'_2 \Gamma_0 \Gamma^3 + \left(b'_2 - \frac{1}{2} \right) \Gamma^3 \gamma_0 + \left(3 b'_2 - \frac{1}{2} \right) \Gamma_0 \Gamma^2 \gamma \right. \\ + \left(\frac{3 b'_1}{2} - \frac{k'v'}{2} \right) \Gamma^2 \gamma_0 \gamma + \left(\frac{3 b'_1}{2} - \frac{k'v'}{2} \right) \Gamma_0 \Gamma \gamma^2 + \left(3 b'_0 - \frac{1}{2} \right) \Gamma \gamma_0 \gamma^2 \\ \left. + \left(b'_0 - \frac{1}{2} \right) \Gamma_0 \gamma^3 + c'_0 \gamma_0 \gamma^3 \right\} \end{aligned}$$

en substituant les valeurs de γ , γ_0 on obtient : (il est inutile d'écrire le premier et le dernier terme qui sont évidemment les mêmes que

pour la fonction d'astigmatisme),

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 = & \Gamma_0 \Gamma^3 (\dots) \\
 & + \Gamma^3 \left[k \left(b_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k^3} + k a_2 \frac{K^4}{k' k^3} + k' \left(b'_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{K}{k'} \right. \\
 & \quad \left. + k' \left(\frac{3 b'_1}{2} - \frac{k' v'}{2} \right) \frac{K^2}{k k'} + k' \left(3 b'_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k^2 k'} + k' c'_0 \frac{K^3}{k^3} \right] \\
 & + \Gamma_0 \Gamma^2 \left[k \left(3 b_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k^3} + 3 k a_2 \frac{K^4}{k' k^3} + k' \left(3 b'_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{K}{k'} \right. \\
 & \quad \left. + k' \left(\frac{3 b'_1}{2} - \frac{k' v'}{2} \right) \frac{K^2}{k k'} + 2 k' \left(\frac{3 b'_1}{2} - \frac{k' v'}{2} \right) \frac{K^2}{k k'} + 3 k' \left(b'_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k^2 k'} \right. \\
 & \quad \left. + 2 k' \left(3 b'_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k k'} + 3 k' c'_0 \frac{K^3}{k^3} \right] \\
 & + \Gamma^2 \left[3 k a_2 \frac{K^4}{k^2 k'^2} + 3 k \left(b_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k^2 k'} + k \left(3 b_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k^2 k'} \right. \\
 & \quad \left. + k \left(\frac{3 b_1}{2} - \frac{k v}{2} \right) \frac{K^2}{k^2} + k' \left(\frac{3 b'_1}{2} - \frac{k' v'}{2} \right) \frac{K^2}{k'^2} + 2 k' \left(3 b'_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k k'^2} \right. \\
 & \quad \left. + 3 k' c'_0 \frac{K^4}{k^2 k'^2} \right] \\
 & + \Gamma_0 \Gamma \left[3 k a_2 \frac{K^4}{k^2 k'^2} + 2 k \left(3 b_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k^2 k'} + k \left(\frac{3 b_1}{2} - \frac{k v}{2} \right) \frac{K^2}{k^2} \right. \\
 & \quad \left. + k' \left(\frac{3 b'_1}{2} - \frac{k' v'}{2} \right) + k' \left(3 b'_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k k'^2} + 3 k' \left(b'_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k k'^2} \right. \\
 & \quad \left. + 3 k' c'_0 \frac{K^4}{k^2 k'^2} \right] \\
 & + \Gamma \left[3 k a_2 \frac{K^4}{k k'^2} + 3 k \left(b_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k k'^2} + 2 k \left(3 b_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k k'^2} \right. \\
 & \quad \left. + 3 k \left(\frac{3 b_1}{2} - \frac{k v}{2} \right) \frac{K^2}{k k'} + k \left(3 b_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{K}{k} + k' \left(3 b'_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k^3} \right. \\
 & \quad \left. + 3 k' c'_0 \frac{K^4}{k k'^3} \right] \\
 & + \Gamma_0 \left[k a_2 \frac{K^4}{k'^3} + k \left(3 b_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k k'^2} + k \left(\frac{3 b_1}{2} - \frac{k v}{2} \right) \frac{K^2}{k k'} \right. \\
 & \quad \left. + k \left(b_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{K}{k} + k' \left(b'_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{K^3}{k'^3} + k' c'_0 \frac{K^4}{k k'^3} \right] \\
 & + [\dots]
 \end{aligned}$$

• On déduit de la simple inspection de la formule, les relations entre les coefficients.

Si on conserve pour les systèmes composants la même notation et si l'on adopte les grandes lettres, sans facteur, pour le système résultant, on aura :

$$\begin{aligned}
 A_2 &= ka_2 \frac{K^4}{k^4} + k'a'_2 + k'(4b'_2 - 1) \frac{K}{k} + k'(3b'_1 - k'v') \frac{K^2}{k^2} \\
 &\quad + k'(4b'_0 - 1) \frac{K^3}{k^3} + k'c'_0 \frac{K^4}{k^4} \\
 2B_2 - K &= 4ka_2 \frac{K^4}{k^3k'} + k(4b_2 - 1) \frac{K^3}{k^3} + k'(4b'_2 - 1) \frac{K}{k'} \\
 &\quad + 2k'(3b'_1 - k'v') \frac{K^2}{kk'} + 3k'(4b'_0 - 1) \frac{K^2}{k^2} + 4k'c'_0 \frac{K^4}{k'k^3} \\
 \frac{3B_1}{2} - K^2V &= 6ka_2 \frac{K^4}{k^2k'^2} + 3k(4b_2 - 1) \frac{K^3}{k'k^2} + \frac{K^2}{k} (3b_1 - kv) \\
 &\quad + \frac{K^2}{k'} (3b'_1 - k'v') + 3k'(4b'_0 - 1) \frac{K^3}{kk'^2} + 6k'c'_0 \frac{K^4}{k^2k'^2} \\
 2B_0 - K &= 4ka_2 \frac{K^4}{kk'^3} + 3k(4b_2 - 1) \frac{K^3}{kk'^2} + 2\frac{K^2}{k'} (3b_1 - kv) \\
 &\quad + k(4b_0 - 1) \frac{K}{k} + k'(4b'_0 - 1) \frac{K^3}{k'^3} + 4k'c'_0 \frac{K^4}{kk'^3} \\
 C_0 &= ka_2 \frac{K^4}{k'^4} + k(4b_2 - 1) \frac{K^3}{k'^3} + k(3b_1 - kv) \frac{K^2}{k'^2} \\
 &\quad + k(4b_0 - 1) \frac{K}{k'} + kc_0 + k'c'_0 \frac{K^4}{k'^4}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

On peut donc calculer ainsi, pour un système quelconque, un objectif par exemple, les cinq paramètres; mais, l'objectif étant réalisé, on peut être amené à des retouches locales qui, n'altérant pas la symétrie, modifieront les surfaces; celles-ci ne seront plus sphériques, ni même du second degré; la forme générale des fonctions n'est pas altérée, mais il devient alors nécessaire de procéder à une détermination expérimentale des paramètres; les phénomènes d'aberration et de coma se prêtent difficilement à des mesures précises; on emploiera donc, soit la fonction d'astigmatisme, soit la différence $\gamma_s - \gamma_t$; cette dernière ne permettant pas la détermination facile de A_2 ne pourra être employée seule.

CHAPITRE VIII

Étude expérimentale d'un objectif.

1^o On commencera par déterminer les éléments cardinaux et surtout la constante k ; pratiquement, pour le cas, à peu près uniformément considéré, d'un système dont les deux faces sont plongées dans l'air, k est la longueur focale principale objet.

Cette détermination étant effectuée par les méthodes classiques, qui exigent un banc d'optique gradué, comporte aussi l'usage d'une mire lumineuse formée de points ou de traits transparents éclairés par une source monochromatique; il sera, en général, plus commode d'employer l'image réelle d'une telle source lumineuse.

2^o Pour les mesures que nous nous proposons d'effectuer, il faudra ajouter au dispositif précédent deux bancs d'optique supplémentaires dont on pourra régler et mesurer les angles par rapport au banc principal, ces angles devant être toujours petits. Le système centré étant disposé sur le banc d'optique principal et son axe bien parallèle au banc, on devra orienter les bancs supplémentaires de façon que la source lumineuse placée sur l'un d'eux envoie, à travers un diaphragme convenablement placé, un petit pinceau dont le rayon moyen, parallèle au banc d'optique qui supporte la source lumineuse, rencontre l'axe du système et le système lui-même; le deuxième banc d'optique devra être disposé pour recevoir le pinceau réfracté dans un viseur micrométrique de faible longueur focale, mais de distance frontale assez grande; les angles des bancs d'optique auxiliaires avec le principal étant relevés, on a le rapport de convergence γ_0 des deux directions conjuguées :

La mire lumineuse sera formée de deux séries de points équidistants formant une croix dont l'une des branches est verticale,

c'est-à-dire perpendiculaire au plan d'incidence, l'autre série étant parallèle à ce plan.

On déplacera le viseur, jusqu'à ce que, sur la division micrométrique, viennent se former les focales des pinceaux convenablement diaphragmés (la diaphragmation devra autant que possible être effectuée par une petite ouverture centrée sur l'axe); la focale tangentielle correspondra à une figure formée de petites lignes verticales, et on déterminera avec exactitude le grandissement (rapport de la distance de deux traits de l'image à la distance de deux points de l'objet); l'inverse de ce rapport sera γ_s . La focale sagittale sera atteinte lorsque l'on aura sur le micromètre une figure formée de petites lignes horizontales; en faisant tourner le micromètre de $\frac{\pi}{2}$, on déterminera γ_t ; pour passer d'une position à l'autre, il aura fallu déplacer le viseur d'une longueur η' correspondant à $\eta = 0$, on aura ($\eta' = S'T'$)

$$\eta' = 2 \alpha' u'^2 \quad 2 \alpha' = \frac{\eta'}{u'^2} \quad \text{et} \quad -2 \alpha' \gamma_t^2 \gamma_0^2 = A \gamma^2 + B \gamma + C$$

On déduira γ de γ_s et γ_t avec une approximation suffisante en prenant leur valeur moyenne avec suppression du 2^e chiffre décimal, s'il diffère dans les deux rapports.

On a ainsi une équation entre A, B, C considérés comme des inconnues; on aura deux autres équations en déplaçant la source sur la direction incidente, sans changer celle-ci et choisissant deux autres valeurs de γ , on pourra ainsi calculer A, B, C pour la valeur donnée de γ_0 .

On fera trois expériences semblables avec une nouvelle valeur de γ_0 , soit γ'_0 , on aura trois valeurs A', B', C', des coefficients; enfin on écrira les 6 équations que l'on a ainsi établies entre les cinq paramètres :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_2 \gamma_0^2 + (B_2 - k) \gamma_0 + \frac{B_1 - 2k^2 V}{4} = A & A_2 \gamma_0'^2 + (B_2 - k) \gamma_0' + \frac{B_1 - 2k^2 V}{4} = A' \\ B_2 \gamma_0^2 + B_1 \gamma_0 + B_0 = B & B_2 \gamma_0'^2 + B_1 \gamma_0' + B_0 = B' \\ \frac{B_1 - 2k^2 V}{4} \gamma_0^2 + (B_0 - k) \gamma_0 + C_0 = C & \frac{B_1 - 2k^2 V}{4} \gamma_0'^2 + (B_0 - k) \gamma_0' + C_0 = C' \end{array} \right.$$

Ces 6 équations permettront dans le cas général, de calculer les cinq paramètres A_2, B_2, B_1, B_0, C_0 et il y aura une vérification sous

forme de relation entre les seconds membres; cette équation prend la forme simple

$$(18) \quad (A'\gamma_0^2 + B'\gamma_0 + C') - (A\gamma_0'^2 + B\gamma_0' + C) = k(\gamma_0 - \gamma_0')(1 - \gamma_0\gamma_0')$$

Si on a choisi pour γ_0, γ_0' des valeurs inverses, la vérification est indépendante de k .

On prendra en général pour $\gamma_0\gamma_0'$ des valeurs simples et, toutes les fois que ce sera possible, les valeurs $+1$ et -1 correspondant aux points nodaux et anti-nodaux; les équations (17) se simplifient notablement, ainsi que la condition de vérification qui devient

$$A' + B' + C' - (A + B + C) = 4k.$$

Ce calcul fait, on écrira les fonctions d'aberration, d'astigmatisme, de coma, et la différence $\frac{2k(\gamma_s - \gamma_t)}{u^2}$; la fonction d'aberration égalée à 0 donnera les 4 points (réels ou imaginaires) sans aberration; l'étude de la fonction est justiciable des méthodes ordinaires.

Si l'instrument a un diaphragme fixe, on déterminera la valeur de γ_0 correspondante, en cherchant les conjugués du point diaphragmé dans l'espace image et dans l'espace objet; on pourra alors déterminer les points de Fermat, les points de Petzval, ou plutôt les surfaces de même nom, et la surface sans distorsion.

Les formes adoptées pour les diverses fonctions, et la condition de vérification vont nous permettre, dans le chapitre suivant, de trouver quelques propriétés nouvelles des surfaces de Petzval, qui avec la notion déjà acquise de stabilisation, préciseront les caractères de ces surfaces; nous pourrons, avec les mêmes formes, étudier en 2^e approximation, les points stigmatiques et les propriétés particulières qu'ils peuvent acquérir, cette étude devant être étendue dans une autre partie au cas des rayons d'inclinaison quelconque.

CHAPITRE IX

Sur l'application de la condition dite de Petzval. Surfaces de Petzval indéterminées.

Entre les rayons de courbure des méridiennes des surfaces conjuguées de Petzval, nous savons qu'il existe la relation

$$\frac{1}{n\rho} - \frac{1}{n'\rho'} = V.$$

On admet, le plus souvent, que cette relation est la seule dont on ait à se préoccuper et, par suite, on regarde comme arbitraire l'un des rayons de courbure; cette conception se révèle dans l'application de la condition de Petzval, $V = 0$, que l'on cherche à réaliser, afin d'obtenir une image plane d'un objet plan. Or, il est manifeste que les relations homographiques qui lient les focales, déterminent complètement les points de Petzval où ces focales sont confondues; par conséquent, non seulement les rayons de courbure, mais les formes des courbes sont fixées; d'ailleurs, même au degré d'approximation employé, on ne peut regarder comme suffisante cette manière de voir.

Sur la droite D d'inclinaison u par rapport à l'axe qu'elle rencontre, et sur sa conjuguée D', soient P, P' deux points conjugués de Petzval situés sur deux surfaces dont les sommets sont aux points S, S' de l'axe (définis par γ); soient ρ et ρ' les rayons de courbure en S et S'; supposons qu'ils subissent des variations finies et deviennent ρ_1 , ρ'_1 ; les points de Petzval sont alors en P₁, P'₁, sur les droites D, D', les déplacements $\overline{PP_1}$, $\overline{P'P'_1}$ sont du second ordre par rapport à u ; leurs projections sur l'axe qui sont du même ordre, pourront s'écrire

$$\delta x = \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{n\rho} - \frac{1}{n\rho_1} \right) \qquad \delta x' = \frac{y'^2}{2} \left(\frac{1}{n'\rho'} - \frac{1}{n'\rho'_1} \right)$$

y et y' étant les ordonnées des points P, P'; ces variations peuvent représenter les déplacements eux-mêmes.

On peut voir immédiatement que notre supposition initiale est contradictoire, en général, aux propriétés du système; les points P, P', P₁, P'₁ étant à la fois focales sagittales et focales tangentielles, on doit avoir nécessairement :

$$\frac{nPP_1}{n'P'P'_1} = \gamma_s^2 = \gamma_t^2$$

et les rapports de convergence tangentiels et sagittaux doivent être égaux, ce qui a lieu seulement pour le point sans distorsion; celui-ci d'ailleurs ne peut être point de Petzval que si les deux points de Petzval sont confondus; cette confusion exige

$$B^2 - 4AC = 0 \quad (1).$$

En dehors des points qui satisfont à cette relation, la condition $V = 0$ ne saurait être la condition de planéité de l'image d'un objet plan. Dans ce cas où $d\gamma_0$ est nul si γ varie, *la surface de Petzval est indéterminée.*

Si donc on veut pouvoir appliquer cette condition $V = 0$, il faut placer le diaphragme en un point donné par une des racines de l'équation $B^2 - 4AC = 0$, qui est du 4^e degré en γ_0 ; les deux racines de l'équation en γ : $A\gamma^2 + B\gamma + C = 0$ seront égales et la valeur γ qui déterminera la surface de Petzval sera donnée par $\gamma = -\frac{B}{2A} = -\frac{2C}{B}$; en dehors de ce dispositif, la condition dite de Petzval n'est pas applicable.

Surfaces de Petzval réciproques.

L'identité rencontrée comme équation de vérification conduit à une propriété remarquable des surfaces de Petzval; on a, en effet,

$$(17) \quad A\gamma_0'^2 + B\gamma_0' + C - (A'\gamma_0^2 + B'\gamma_0 + C') = k(\gamma_0 - \gamma_0')(1 - \gamma_0\gamma_0')$$

Or, supposons que le point γ_0' soit choisi au sommet d'une

(1) Fin du chapitre IV.

surface de Petzval déterminée par diaphragmation au point γ_0 , γ'_0 est racine de l'équation $A\gamma^2 + B\gamma + C = 0$, on a donc

$$A'\gamma_0^2 + B'\gamma_0 + C' = k(\gamma'_0 - \gamma_0)(1 - \gamma_0\gamma'_0);$$

sur une droite passant par le point γ'_0 , les points de Petzval sont donnés par $A'\gamma^2 + B'\gamma + C' = 0$, dès lors γ_0 n'est pas en général racine de cette équation et la diaphragmation en γ'_0 ne déterminera pas une surface de Petzval au point γ_0 .

Il faudra, pour que cette circonstance se produise, que l'on ait $\gamma_0\gamma'_0 = 1$.

Donc, pour que deux points soient tels que la diaphragmation en l'un d'eux détermine une surface de Petzval passant par l'autre, il faut que les deux points soient inverses, mais cette condition n'est pas suffisante, il faut, en outre, que γ_0 soit racine de l'équation réciproque :

$$A \frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{B}{\gamma_0} + C = 0$$

$$\text{ou} \quad \frac{B_1 - 2k^2V}{4} \left(\gamma_0^2 + \frac{1}{\gamma_0^2} \right) + (B_2 + B_0 - k) \left(\gamma_0 + \frac{1}{\gamma_0} \right) + A_2 + B_1 + C_0 = 0;$$

les 4 racines de cette équation, inverses deux à deux, donnent deux solutions de la question des surfaces de Petzval réciproques.

Les deux solutions, qui sont données plus simplement par l'équation $A = C$ ou

$$\gamma_0^2 \left(A_2 - \frac{B_1 - 2k^2V}{4} \right) + \gamma_0 (B_2 - B_0) + \frac{B_1 - 2k^2V}{4} - C_0 = 0,$$

déterminent, par diaphragmation au point γ_0 , deux surfaces de Petzval aux points inverses.

Points stigmatiques sur l'axe et points de Petzval sur les droites conjuguées qui passent par ces points.

L'identité (17) peut s'écrire

$$k(\gamma_0 - \gamma'_0)(1 - \gamma_0\gamma'_0) = A\gamma_0^2 + B\gamma_0 + C + A(\gamma_0'^2 - \gamma_0^2) + B(\gamma'_0 - \gamma_0) - C - [(A'\gamma_0'^2 + B'\gamma'_0 + C') - A'(\gamma_0'^2 - \gamma_0^2) - B'(\gamma'_0 - \gamma_0) - C']$$

ou

$$P' - P = \{ (A + A')(\gamma'_0 + \gamma_0) + (B + B') + k(1 - \gamma_0\gamma'_0)(\gamma'_0 - \gamma_0) \}$$

d'où $\frac{dP}{d\gamma_0} = 2(2A\gamma_0 + B) + k(1 - \gamma_0^2)$, relation qui peut, avec facilité, s'établir directement.

Considérons en M, M' deux points conjugués stigmatiques (γ_0); P est nul en ce point $A\gamma_0^2 + B\gamma_0 + C = 0$; sur la droite D passant par le point objet et sur sa conjuguée D', les points de Petzval sont donnés par $A\gamma^2 + B\gamma + C = 0$, l'une des racines est γ_0 , l'un des points de Petzval est confondu avec le point M; le deuxième point viendra aussi s'y confondre, si $2A\gamma + B = 0$ a pour racine γ_0 , mais si $2A\gamma_0 + B = 0$, $\frac{dP}{d\gamma_0}$ est différent de 0 et le point stigmatique ne peut être racine double de P; inversement, si $\frac{dP}{d\gamma_0} = 0$, c'est-à-dire si le point stigmatique est un point double, $2A\gamma_0 + B = -\frac{k}{2}(\gamma_0^2 - 1)$, et le deuxième point de Petzval ne peut se confondre avec le point [M, M'].

On voit donc que : Un point stigmatique ne peut être à la fois point double sur l'axe et point double de Petzval sur une direction inclinée, que si $\gamma_0 = \pm 1$, c'est-à-dire si ce point est un point nodal ou anti-nodal.

On verrait aussi que $\left(\frac{d\Phi}{d\gamma}\right)_{\gamma=\gamma_0} = \frac{3}{4} \frac{dP}{d\gamma_0} - \frac{k}{4}(\gamma_0^2 - 1)$ de telle sorte que l'un des points de Fermat coïncidant avec le point stigmatique simple, un deuxième point de Fermat vient aussi en coïncidence avec le point stigmatique double si $\gamma_0 = \pm 1$, mais même si le point nodal ou anti-nodal est point triple, le troisième point de Fermat demeure distinct, car $\left(\frac{d^2\Phi}{d\gamma^2}\right)_{\gamma=\gamma_0} = \frac{1}{2} \frac{d^2P}{d\gamma_0^2} - k\gamma_0$

Condition des sinus.

SUPPRESSION DE L'ABERRATION, DU COMA, DE L'ASTIGMATISME. —

L'emploi de la forme $Q = M_2\gamma_0^2 + M_1\gamma_0 + M_0$ pour la fonction d'astigmatisme, permet de donner, avec précision, dans tous les cas, la signification de la condition des sinus en 2^e approximation. La fonction de coma prend la forme

$$\Phi = \left(M_2\gamma + \frac{M_1}{2}\right)\gamma_0 + \left(\frac{M_1}{2}\gamma + M_0\right);$$

la fonction $\mathcal{A}$ qui figure dans l'expression de $\frac{\sin u'}{\sin u}$ et de $\frac{du'}{du}$; peut s'exprimer au point γ en fonction de M_2, M_1, M_0 ,

$$h\gamma \left(\mathcal{A} - \frac{1 - \gamma^2}{2} \right) = \left(M_2 \gamma^2 + \frac{M_1}{2} \gamma + 2 n' a' \gamma^4 \right) = \left(\frac{M_1}{2} \gamma + M_0 - 2 na \right).$$

1° La condition des sinus, vérifiée en un point quelconque γ , exige $\mathcal{A} = \frac{1 - \gamma^2}{2}$, c'est-à-dire

$$2 na = \frac{M_1}{2} \gamma + M_0 \qquad 2 n' a' \gamma^3 = - \left(M_2 \gamma + \frac{M_1}{2} \right).$$

Pour donner un sens physique à ces relations, remarquons que la position du diaphragme, qui peut supprimer le coma au point γ , est donnée par

$$\Phi = 0, \text{ ou } \gamma_0 = - \frac{\frac{M_1}{2} \gamma + M_0}{M_2 \gamma + \frac{M_1}{2}} = \frac{2 na}{2 n' a' \gamma^3}, \text{ et } 2 na - 2 n' a' \gamma_0 \gamma^3 = 0;$$

mais si on désigne par φ, φ' les coefficients relatifs au coma, on a : $2 n \varphi - 2 n' \varphi' \gamma_0 \gamma^3 = \Phi = 0$, ce qui exige $\varphi = a, \varphi' = a'$: pour le système ainsi diaphragmé, la condition des sinus au point γ entraîne, en ce point, l'égalité respective des coefficients d'aberration et des coefficients de coma.

Quant à la position du diaphragme, elle ne dépend que des aberrations, et varie de $\gamma_0 = 0$ (foyer objet), pour un point de l'espace objet, à $\gamma_0 = \infty$ (foyer image), pour un point de l'espace image.

2° La fonction d'astigmatisme prend, pour la position γ_0 du diaphragme qui annule le coma, la valeur

$$Q = \frac{(M_2 \gamma^2 + M_1 \gamma + M_0) (4 M_2 M_0 - M_1^2)}{4 \left(M_2 \gamma + \frac{M_1}{2} \right)^2},$$

et s'annule, (a), si $(M_1^2 - 4 M_2 M_0) = 0$, c'est-à-dire si $\gamma_0 = - \frac{M_1}{2 M_2}$.
 = $-\frac{2 M_0}{M_1}$ est racine double de $Q = 0$, une surface de Petzval est alors stabilisée en γ ; (b) si $M_2 \gamma^2 + M_1 \gamma + M_0 = 0$, le point γ sur l'axe

est stigmatique, et la surface de Petzval qui y passe constamment, est alors quasi aplanétique.

3^o Supposons que la relation des sinus ait lieu en même temps que l'une des deux conditions (a) ou (b); — (a) les coefficients de la fonction d'astigmatisme peuvent être calculés en fonction des coefficients d'aberration :

$$Q = \frac{(2na - 2n'a'\gamma^3\gamma_0)^2}{2na - 2n'a'\gamma^4} = 2n\alpha - 2n'a'\gamma^2\gamma_0^2,$$

et s'il s'agit d'un point objet $a' = \alpha'$:

Si au point γ soumis à la condition des sinus, la suppression de l'astigmatisme et celle du coma ont lieu pour une même position du diaphragme, l'aberration, le coma et l'astigmatisme pour un point objet, sont donnés par le même coefficient.

(b) Si l'aberration est nulle au point γ , cette condition et celle des sinus se traduisent par : $M_2\gamma + \frac{M_1}{2} = 0$, $\frac{M_1}{2}\gamma + M_0 = 0$, Φ est nul, quel que soit γ_0 , l'image est dépourvue de coma, quelle que soit la position du diaphragme, mais la fonction d'astigmatisme, $Q = M_2(\gamma_0 - \gamma)^2$ et l'astigmatisme ne sont jamais nuls, car γ_0 est nécessairement différent de γ . Il existe une relation intéressante entre les rayons de courbure des surfaces sagittales et tangentielles,

$$\frac{1}{n\rho_s} - \frac{1}{n'\rho'_s} = V + \frac{Q}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2} = V + \frac{M_2}{k^2}$$

$$\frac{1}{n\rho_t} - \frac{1}{n'\rho'_t} = V + \frac{3Q}{k^2(\gamma_0 - \gamma)^2} = V + \frac{3M_2}{k^2},$$

et si on suppose une surface objet $\rho_s = \rho_t$, la différence

$$\frac{1}{n'\rho'_t} - \frac{1}{n'\rho'_s} = \frac{2M_2}{k^2}$$

est indépendante de la position du diaphragme.

Nous appellerons point stigmatique de Abbe ou point a, un point stigmatique qui jouit de ces propriétés.

4^o Pour que l'astigmatisme soit nul, lorsque les conditions de suppression de l'aberration et du coma sont satisfaites, il faut que $M_2 = 0$.

En résumé : un point γ stigmatique sur l'axe, exige l'unique condition $M_2\gamma^2 + M_1\gamma + M_0 = 0$.

La suppression du coma sur une surface qui passe par ce point nécessite, en plus, la condition des sinus, c'est-à-dire les deux conditions :

$$M_2\gamma + \frac{M_1}{2} = 0 \qquad \frac{M_1}{2}\gamma + M_0 = 0$$

Enfin, la suppression de l'astigmatisme et du coma sur une surface passant par le point γ , exige une nouvelle condition $M_2 = 0$, au total trois conditions

$$M_0 = 0 \qquad M_1 = 0 \qquad M_2 = 0$$

C'est à ce dernier cas qu'on devra réserver le nom d'*aplanétisme élémentaire*; le point qui jouira de ces propriétés sera appelé point Λ .

Points stigmatiques A.

Les équations relatives à un point $\gamma = \alpha$

$$M_2 = A_2\alpha^2 + B_2\alpha + \frac{B_1 - 2k^2V}{4} = 0,$$

$$M_1 = (B_2 - k)\alpha^2 + B_1\alpha + B_0 - k = 0, \quad M_0 = \frac{B_1 - 2k^2V}{4}\alpha^2 + B_0\alpha + C_0 = 0,$$

permettent d'écrire la fonction d'astigmatisme au point α :

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} Q &= (\gamma - \alpha) \left\{ (\gamma_0 - \alpha) \left[A_2 (\gamma\gamma_0 + \alpha [\gamma + \gamma_0]) + B_2 (\gamma_0 + \gamma) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3A_2\alpha^2 - 2B_2\alpha - k\alpha + 2k^2V \right] + k(1 - \gamma\gamma_0) \right\} \end{aligned} \right.$$

de même on aura la fonction Φ

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi &= (\gamma - \alpha) \left\{ (\gamma_0 - \alpha) \left[A_2 (\gamma^2 - \alpha^2) + A_2\alpha (\gamma - \alpha) + \frac{3B_2 - k}{2} (\gamma - \alpha) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - k\alpha + k^2V \right] + \left(A_2\alpha + \frac{B_2 + k}{2} \right) (\gamma - \alpha)^2 + k^2V (\gamma - \alpha) + k(1 - \gamma^2) \right\} \end{aligned} \right.$$

qui toutes deux donnent en faisant $\gamma = \gamma_0$ la fonction d'aberration P

$$(20) \quad P = (\gamma_0 - \alpha) \left\{ (\gamma_0 - \alpha) \left[A_2 (\gamma_0^2 - \alpha^2) + 2 (A_2 \alpha + B_2) (\gamma_0 - \alpha) - k\alpha + 2k^2V \right] + k (1 - \gamma_0^2) \right\},$$

où le stigmatisme du point α est mis en évidence.

Enfin, on peut écrire la fonction de distorsion

$$D = \frac{-2k(\gamma_s - \gamma_t)}{u^2} = (B_2\gamma_0^2 + B_1\gamma_0 + B_0) \gamma + \frac{B_1 - 2k^2V}{2} \gamma_0^2 + 2(B_0 - k) \gamma_0 + 2C_0$$

qui devient l'expression facilement transformable

$$(21) \quad D = \frac{-2k(\gamma_s - \gamma_t)}{u^2} = (\gamma_0 - \alpha) \left\{ \left[B_2 (\gamma_0 + \alpha) + B_1 \right] \gamma + \frac{B_1 - 2k^2V}{2} (\gamma_0 + \alpha) + 2(B_0 - k) \right\} + k\gamma(\alpha^2 + 1) - 2k\alpha$$

Parmi les remarques que peuvent suggérer ces formules, signalons celles qui ont trait à la diaphragmation au point α ; pour $\gamma_0 = \alpha$ on obtient :

$$Q_\alpha = k(\gamma - \alpha)(1 - \gamma\alpha)$$

$$\Phi_\alpha = \left[\left(A_2\alpha + \frac{B_2 + k}{2} \right) (\gamma - \alpha)^2 + k^2V(\gamma - \alpha) + k(1 - \gamma^2) \right] (\gamma - \alpha)$$

$$D = - \frac{2k(\gamma_s - \gamma_t)}{u^2(\alpha)} = k\gamma(\alpha^2 + 1) - 2k\alpha$$

1° Au point α sont confondus un point de Petzval et un point de Fermat;

2° Le second point de Petzval est inverse du premier $\gamma = \frac{1}{\alpha}$

3° Ce deuxième point de Petzval n'est confondu avec un point de Fermat que si : $(\alpha^2 - 1)$ étant différent de 0)

$$A_2\alpha + \frac{B_2 - k}{2} = k \left(\frac{1 - \alpha kV}{1 - \alpha^2} \right) \quad A_2\alpha + \frac{B_2 - k}{2} = k \frac{\alpha(\alpha - kV)}{1 - \alpha^2}$$

1° Le point sans distorsion est donné par $\gamma = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ⁽¹⁾ et ce point ne peut se confondre avec un point de Fermat que si :

$$A_2 x + \frac{B_2 + k}{2} = -k \left(\frac{1}{x^2} - \frac{kV(1+x^2)}{\alpha(x^2-1)} \right)$$

2° Ces deux confusions ne peuvent avoir lieu simultanément que

$$\text{si} \quad kV = -\frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad A_2 x + \frac{B_2 + k}{2} = \frac{2k \times k^2 V^2}{1 - k^2 V^2} = \frac{2k}{x^2 - 1}$$

Pour le dioptré sphérique ou le dioptré ellipsoïdal de révolution $kV = -1$ $\alpha = \frac{n}{n'}$ $\frac{1}{\alpha} = \frac{n'}{n}$; le point sans distorsion est donné par $\gamma = \frac{2nn'}{n^2 + n'^2}$ et le troisième point de Fermat par $\gamma = 1$, il ne peut y avoir confusion entre ces derniers points, car elle exigerait $n = n'$.

Enfin si, introduisant la condition 3° dans la fonction d'aberration, on fait dans cette fonction $\gamma_0 = \frac{1}{\alpha}$, et si on égale à 0, ce qui revient à supposer que la surface quasi-aplanétique réciproque passe aussi par un point stigmatique de l'axe, on obtient :

$$A_2 = k \frac{\alpha - 2kV + \frac{1}{\alpha}}{\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)^2}$$

le système est complètement déterminé. Pour le dioptré,

$$kV = -1 \quad \alpha = \frac{n}{n'} \quad A_2 = k \frac{nn'}{(n' - n)^2}$$

Le cas d'un système centré présentant deux surfaces quasi-aplanétiques fixes, dont les sommets sont des points stigmatiques, quoique très particulier, est intéressant, car il comprend le dioptré ; proposons-nous de déterminer les fonctions d'aberration, d'astig-

(1) $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\gamma}$

matisme et de coma; les valeurs de A_2 et de B_2 sont respectivement

$$A_2 = -kx \frac{1 - 2\alpha kV + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} \quad B_2 = \frac{k(1 - 2\alpha kV + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2} (1 + \alpha^2)$$

$$A_2\alpha + B_2 = k \frac{1 - 2\alpha kV + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2}, \quad \frac{B_1 - 2k^2V}{4} = -kx \frac{1 - 2\alpha kV + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} = A_2 \dots$$

Prenons Q sous la forme

$$Q = (\gamma - \alpha) \left\{ (\gamma_0 - \alpha) \left[A_2 \left(\gamma\gamma_0 + \alpha(\gamma + \gamma_0) \right) + B_2(\gamma_0 + \gamma) \right. \right. \\ \left. \left. - 3A_2\alpha^2 - 2B_1\alpha - k(\gamma + \alpha) + 2k^2V \right] + k(1 - \alpha\gamma) \right\}$$

Exprimant que $\frac{1}{\alpha}$ est racine et remplaçant les coefficients, on obtient :

$$Q = -k(\gamma - \alpha) \left(\gamma - \frac{1}{\alpha} \right) \left[\frac{\alpha(1 - 2\alpha kV + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2} \left(\gamma_0^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \gamma_0 + 1 \right) + \gamma_0 \right]$$

la fonction P serait obtenue en remplaçant γ par γ_0 ; il résulte de là :

1° que les deux autres points stigmatiques (réels ou imaginaires) sont inverses, et si β est l'un de ces points,

$$(a) \quad \beta + \frac{1}{\beta} = \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{(1 - \alpha^2)^2}{\alpha(1 - 2\alpha kV + \alpha^2)}$$

2° Ces points jouissent de cette propriété remarquable, que sur toutes les directions qui les contiennent, Q étant toujours nul, les focales tangentielles d'un point supposé mobile sont constamment confondues avec les focales sagittales du même point.

3° Ces points stigmatiques ne pourront être superposés que si Q a une racine double en γ_0 ; la condition de la racine double se décompose en $\alpha^2 - 1 = 0$, $k^2V^2 - 1 = 0$, cette racine double est ± 1 , puisque les racines sont inverses.

C'est cette importante propriété (2°) qui définira les points B.

Points stigmatiques B.

Les couples de points dont nous avons représenté les rapports de convergence par α et β ont des relations tellement étroites qu'on ne peut logiquement les envisager séparément.

Reprenons la formé $Q = A\gamma^2 + B\gamma + C$
la condition pour que cette équation ait une racine double en γ ,
est que

$$\gamma = -\frac{B}{2A} = -\frac{2C}{B}$$

et cette valeur de γ définit une surface de Petzval sans distorsion
pourvu que γ_0 soit racine de $B^2 - 4AC = 0$; si cette racine β est
telle que: $2A\beta + B = 0$, le point de Petzval sans distorsion est
à l'origine, et enfin si $A_\beta = 0$ $B_\beta = 0$ $C_\beta = 0$, il y aura, par
diaphragmation au point β , une infinité de surfaces de Petzval
sans distorsion; les conditions précédentes :

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} A_2\beta^2 + (B_2 - k)\beta + \frac{B_1 - 2k^2V}{4} = 0 \quad B_2\beta^2 + B_1\beta + B_0 = 0 \\ \frac{B_1 - 2k^2V}{4}\beta^2 + (B_0 - k)\beta + C_0 = 0 \end{array} \right.$$

exigent que β soit racine de la fonction d'aberration, et par consé-
quent représente un point stigmatique; on pourra, dès lors, écrire
les quatre fonctions au moyen de β et de deux autres paramètres.
Ces fonctions sont transcrites dans la 3^e partie (points b , B).

Mais si on veut supposer qu'il y a dans le système un point β'
jouissant des mêmes propriétés, il devra satisfaire aux équations
précédentes et il en résultera, si on suppose $\beta' - \beta \neq 0$,

$$\begin{aligned} \beta + \beta' &= -\frac{B_2 - k}{A_2} = -\frac{B_1}{B_2} = -\frac{B_0 - k}{\frac{B_1 - 2k^2V}{4}} \\ &= -\frac{(B_2 - k)\beta^2 + B_2\beta + B_0 - k}{A_2\beta^2 + B_2\beta + \frac{B_1 - 2k^2V}{4}} = -\frac{k(\beta^2 + 1)}{k\beta} \end{aligned}$$

d'où $\beta' = \frac{1}{\beta}$, le deuxième point est nécessairement inverse du pre-
mier.

Les équations (22) doivent admettre pour racine β et $\frac{1}{\beta}$ et tous
les coefficients sont déterminés en fonction de A_2 , et

$$A_2 \frac{k\beta(1 + 2\beta kV + \beta^2)}{(1 - \beta^2)^2};$$

A_2 est indéterminé en apparence si $kV = \pm 1$ $\beta = \mp 1$ $A_2 = \mp \frac{k}{4}$ (solution particulière). La fonction d'astigmatisme devient :

$$Q = \frac{k\beta(1 + 2\beta kV + \beta^2)}{(1 - \beta^2)^2} \left[(\gamma_0 - \beta) \left(\gamma_0 - \frac{1}{\beta} \right) \left(\gamma^2 - \left[\beta + \frac{1}{\beta} \right] \right) - \frac{(1 - \beta^2)^2}{\beta(1 + 2\beta kV + \beta^2)} (\gamma + 1) \right]$$

Les deux racines en γ (α et $\frac{1}{\alpha}$) nous donnent :

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) = - \frac{(1 - \beta^2)^2}{\beta(1 + 2\beta kV + \beta^2)} = - \frac{k}{A_2}$$

en comparant à l'équation (a) on voit que : si l'existence de deux points stigmatiques A, nécessairement inverses, sommets de surfaces quasi aplanétiques, entraîne celle de deux points stigmatiques inverses B, générateurs, par diaphragmation en ces points, d'une infinité de surfaces de Petzval sans distorsion, la réciproque est exactement vraie ; si kV est donné, l'un des couples détermine complètement l'autre.

On a :

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) = - \frac{(1 - \beta^2)^2}{\beta(1 + 2\beta kV + \beta^2)} = - \frac{(1 - \alpha^2)^2}{\alpha(1 - 2\alpha kV + \alpha^2)}$$

qui donne

$$2kV = - \frac{(1 - \alpha\beta)^2 + (\beta - \alpha)^2}{(\beta - \alpha)(1 - \alpha\beta)} = - \left(\frac{1 - \alpha\beta}{\beta - \alpha} + \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha\beta} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{Si } \beta = 1 \quad kV = -1 \quad A_2 = - \frac{k\alpha}{(1 - \alpha)^2} \\ \beta = -1 \quad kV = +1 \quad A_2 = - \frac{k\alpha}{(1 + \alpha)^2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ quelconque;} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{si } \alpha = +1 \quad kV = +1 \quad A_2 = \frac{k\beta}{(1 - \beta)^2} \\ \alpha = -1 \quad kV = -1 \quad A_2 = \frac{k\beta}{(1 + \beta)^2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \beta \text{ indéterminé.} \end{array} \right.$$

on peut avoir à la fois $\beta = -1$ $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$ $\alpha = -1$; dans le deuxième cas, la fonction d'astigmatisme devient :

$$Q = \frac{k}{4} (\gamma_0 - 1)^2 (\gamma + 1)^2 \quad (\text{miroir sphérique}).$$

On verrait aisément que si kV est donné, on peut avoir β en fonction de α ou réciproquement α en fonction de β par les formules :

$$\beta = \frac{2 - kV \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \pm \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \sqrt{k^2 V^2 - 1}}{\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2kV}$$

$$\alpha = \frac{2 + kV \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \pm \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \sqrt{k^2 V^2 - 1}}{\beta + \frac{1}{\beta} + 2kV}$$

la condition de réalité des points que l'on cherche est la même dans les deux cas, $k^2 V^2 > 1$.

Si on cherche ce que devient la fonction de coma dans ce cas particulier, on trouve :

$$(23) \quad \Phi = -k\alpha \frac{1 - 2\alpha kV + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} \left(\gamma - \frac{1}{\alpha} \right) (\gamma - \alpha)$$

$$\left[\gamma_0 \gamma - \frac{\gamma_0 + \gamma}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{(1 - \alpha^2)^2}{\alpha(1 - 2\alpha kV + \alpha^2)} \right) + 1 \right]$$

ou

$$\Phi = -k\alpha \frac{1 - 2\alpha kV + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} \left(\gamma - \frac{1}{\alpha} \right) (\gamma - \alpha)$$

$$\left(\gamma_0 \gamma - \frac{\gamma_0 + \gamma}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) - 1 \right) :$$

$$\gamma_0 \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) - 2$$

le troisième point sans coma est donné par $\gamma = \frac{\gamma_0 \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) - 2}{2\gamma_0 - \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right)}$

et sous cette forme, on voit bien que si β est racine double et par conséquent $= \pm 1$ on a aussi $\gamma = \pm 1$, et nous retrouvons encore une fois le cas du dioptré.

Enfin, on peut se préoccuper d'un système dans lequel on rencontrerait à la fois un seul point A (α) et un point B (β), on a évidemment les 6 équations

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Lambda_2 \alpha^2 + B_2 \alpha + \frac{B_1 - 2k^2 V}{4} = 0 \quad \Lambda_2 \beta^2 + (B_2 - k) \beta + \frac{B_1 - 2k^2 V}{4} = 0 \\ B_2 - k) \alpha^2 + B_1 \alpha + B_0 - k = 0 \quad B_2 \beta^2 + B_1 \beta + B_0 = 0 \\ \frac{B_1 - 2k^2 V}{4} \alpha^2 + B_0 \alpha + C_0 = 0 \quad \frac{(B_1 - 2k^2 V)}{4} \beta^2 + (B_0 - k) \beta + C = 0 \end{array} \right. \quad (22)$$

de ces 6 équations, 5 seulement sont distinctes, et le système est complètement déterminé, mais sans aucune condition entre α , β , k et V ; le calcul des coefficients est facile, transcrivons A_2 et B_2

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{k}{(\alpha - \beta)^3} \left[(\alpha - \beta)^2 + (1 - \alpha\beta) - 2kV(\alpha - \beta) \right] \\ B_2 - k &= \frac{k}{(\alpha - \beta)^3} \left[(\beta^3 - 3\alpha\beta^2 + \alpha + \beta - 2kV(\alpha^2 - \beta^2)) \right] \\ B_2 &= \frac{k}{(\alpha - \beta)^3} \left[\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + \alpha + \beta - 2kV(\alpha^2 - \beta^2) \right] \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ces valeurs portées dans la fonction d'astigmatisme donnent :

$$\begin{aligned} (b) \quad Q &= -\frac{k}{(\alpha - \beta)^3} (\gamma_0 - \beta) (\gamma - \alpha) \left\{ \left[(\alpha - \beta)^2 + (1 - 2\beta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2kV(\alpha - \beta) \right] \gamma_0 \gamma + \left[\alpha\beta - 1 + 2kV(\alpha - \beta) \right] (\beta\gamma_0 + \alpha\gamma) \right. \\ &\quad \left. + \alpha\beta(1 - \alpha\beta) - (\alpha - \beta)^2 - 2kV\alpha\beta(\alpha - \beta) \right\}; \end{aligned}$$

la quantité entre crochets ayant la forme homographique, à chaque valeur de γ_0 correspondra pour γ une et une seule valeur qui annulera la quantité entre crochets, si donc on donne à γ_0 une valeur différente de β , les deux racines de $Q = 0$ seront $\gamma = \alpha$, c'est-à-dire la valeur qui donne la surface aplanétique ou quasi-aplanétique fixe, et une autre valeur qui dépend en général de γ_0 , ce qui prouve que *l'existence simultanée d'un point A et d'un point B n'entraîne pas celle d'un autre couple de points analogues*; d'ailleurs, les deux points stigmatiques qui complètent le système sont donnés par une équation qui les fait dépendre de kV ; l'équation qui donne les valeurs complémentaires de $\gamma\gamma_0$ peut être écrite :

$$\begin{aligned} \gamma = \left\{ \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\beta} (\beta\gamma_0 - 1) (\alpha\gamma - 1) + \left(2kV - \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\beta} - \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta} \right) \right. \\ \left. \left[\gamma_0\gamma - (\beta\gamma_0 + \alpha\gamma) + \alpha\beta \right] \right\} (\alpha - \beta) = 0; \end{aligned}$$

la condition pour que la relation homographique prenne la forme

$(\gamma_0 - b) (\gamma - a) = 0$ est : $2kV = \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\beta} + \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}$ et les deux solutions sont alors $\gamma = \frac{1}{\alpha}$, $\gamma_0 = \frac{1}{\beta}$.

Tous ces résultats supposent que α est différent de β ; or cette supposition est inévitable, car elle entraînerait les conditions incompatibles (puisque k ne peut être nul)

$$k\alpha = 0$$

$$k(\alpha^2 + 1) = 0.$$

Pour obtenir la fonction de coma dans le cas d'un seul point B, il suffit de remarquer que, si la diaphragmation a lieu au point γ_0 , la fonction $\Phi = \left(M_2\gamma + \frac{M_1}{2}\right)\gamma_0 + \frac{M_1}{2} + M_0$ donne sur la surface β , avec $\mu_2 = \mu_0 = k\beta$ $\mu_1 = -k(\beta^2 + 1)$

$$\Phi_\beta = \frac{k}{2} (\beta^2 - 1) (\gamma_0 - \beta).$$

Si on exprime Φ_β au moyen de la formule générale, on aura l'identité

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi - \Phi_\beta + \frac{k}{2} (\beta^2 - 1) (\gamma_0 - \beta) \\ \Phi &= \left(A_2\gamma_0 + \frac{B_2 - k}{2}\right)(\gamma^3 - \beta^3) + \left(\frac{3B_2 - k}{2}\gamma_0 + \frac{3B_1}{4} - \frac{k^2V}{2}\right)(\gamma^2 - \beta^2) \\ &\quad + \left(\frac{3B_1 - 2k^2V}{4}\gamma_0 + \frac{3B_1 - k}{2}\right)(\gamma - \beta) + \frac{k}{2} (\beta^2 - 1) (\gamma_0 - \beta) \end{aligned}$$

et, en tirant B_0 et B_1 des équations (22)

$$\begin{aligned} (25) \quad \Phi &= (\gamma_0 - \beta) \left[\left(A_2(\gamma + 2\beta) + \frac{3B_2 - k}{2} \right) (\gamma - \beta)^2 \right. \\ &\quad \left. + k(2\beta + kV)(\gamma - \beta) + \frac{k}{2} (\beta^2 - 1) \right] + \left(A_2\beta + \frac{B_2 - k}{2} \right) (\gamma - \beta)^3 \\ &\quad + k(\beta + kV)(\gamma - \beta)^2 + \frac{k}{2} (\beta^2 - 1) (\gamma - \beta); \end{aligned}$$

de cette formule générale on déduit :

1° Si la diaphragmation n'a pas lieu en β , et si on fait $\gamma = \beta$, Φ_β n'est jamais nul à moins que l'on ait $\beta = \pm 1$; d'ailleurs $\gamma = \beta$ pourra être racine double si $kV = \mp 2$.

2° Si $\gamma_0 = \beta$, l'un des points sans coma est à l'origine sur l'axe;

si $\beta = \pm 1$ deux points sans coma sont confondus sur l'axe, et si en même temps $kV = \mp 1$, tous les trois y sont confondus; cependant, si, en même temps $A_2\beta + \frac{B_2 - k}{2} = 0$ la formule devient illusoire.

3° Ce dernier cas est celui du dioptré, la valeur générale de Φ devient ($\beta = 1$, $kV = -1$)

$$\Phi = (\gamma_0 - 1) (\gamma - 1) (A_2\gamma^2 - (2A_2 - k)\gamma + A_2) = \\ - \frac{knn'}{(n' - n)^2} (\gamma_0 - 1) (\gamma - 1) \left(\gamma - \frac{n}{n'}\right) \left(\gamma - \frac{n'}{n}\right)$$

si on pose $A_2 = -\frac{knn'}{(n' - n)^2}$

4° Si on exclut le cas qui rend la formule de Φ illusoire pour $\gamma_0 = \beta$, les deux racines de $\Phi = 0$, autres que β , ne sont pas, en général inverses, elles le deviennent si :

$$A_2\beta + \frac{B_2 - k}{2} = \frac{k}{2} \frac{\beta^2 + 1 + 2k\beta V}{\beta^2 - 1}$$

et leur somme a alors pour valeur $2 \frac{kV(1 + \beta^2) + 2\beta}{\beta^2 + 1 + 2kV\beta}$ (qui convient comme solution particulière au cas illusoire);

Pour avoir la fonction Φ dans le cas où il y a à la fois un point B (β) et un point A (α), il suffit d'exprimer que Φ s'annule quelque soit γ_0 , pour $\gamma = \alpha$ on obtient :

$$A_2(\alpha + 2\beta) + \frac{3B_2 - k}{2} = - \frac{k(2\beta + kV)(\alpha - \beta) + \frac{k}{2}(\beta^2 - 1)}{(\alpha - \beta)^2} \\ A_2\beta + \frac{B_2 - k}{2} = - \frac{k(\beta + kV)(\alpha - \beta) + \frac{k}{2}(\beta^2 - 1)}{(\alpha - \beta)^2}$$

qui donne d'abord pour A_2 la valeur déjà trouvée :

$$A_2 = - \frac{k}{(\alpha - \beta)^3} \left[(\alpha - \beta)^2 + (1 - \alpha\beta) - 2kV(\alpha - \beta) \right]$$

et pour la fonction Φ

$$\begin{aligned} \Phi = - \frac{k(\gamma - \alpha)}{(\alpha - \beta)^3} \left\{ (\gamma_0 - \beta) \left[(\gamma - \beta)^2 \left((\alpha - \beta)^2 + (1 - \alpha\beta) \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 2kV(\alpha - \beta) \right) + (\gamma - \beta)(\alpha - \beta) \left((2\beta + kV)(\alpha - \beta) + \frac{\beta^2 - 1}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{\beta^2 - 1}{2}(\alpha - \beta) \right] + (\gamma - \beta)(\alpha - \beta) \left[(\gamma - \beta) \left((\beta + kV)(\alpha - \beta) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\beta^2 - 1}{2} \right) + \frac{\beta^2 - 1}{2}(\alpha - \beta) \right] \right\} \end{aligned}$$

En faisant $\gamma = \gamma_0$ soit dans la valeur (b) de Q, soit dans la valeur de Φ que nous venons d'écrire, on obtient :

$$\begin{aligned} P = - \frac{k(\gamma_0 - \alpha)(\gamma_0 - \beta)}{(\alpha - \beta)^3} \left\{ \gamma_0^2 \left[(\alpha - \beta)^2 + (1 - \alpha\beta) - 2kV(\alpha - \beta) \right] \right. \\ \left. + \gamma_0(\alpha + \beta)(\alpha\beta - 1 + 2kV(\alpha - \beta) + \alpha\beta(1 - \alpha\beta) - (\alpha - \beta)^2 \right. \\ \left. - 2kV\alpha\beta(\alpha - \beta) \right\} \end{aligned}$$

De même, si on suppose l'existence simultanée d'un point A et d'un point B, on obtient une expression de Φ qui contient $(\gamma - \alpha)$ en facteur d'une expression en $\gamma_0, \gamma^2, \gamma$, dont tous les coefficients sont déterminés, et qui ne prend la forme simple déjà trouvée que si

$$\frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\beta} + \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta} = 2kV$$

Nous allons retrouver d'une manière un peu différente, et en dehors de toute approximation, les systèmes que nous venons de passer en revue, mais il n'est pas inutile de montrer d'abord comment se présentent, dans les systèmes simples, quelques-uns des points remarquables que nous allons étudier.

TROISIÈME PARTIE

CHAPITRE X

Points stigmatiques. — Dioptries.

Points aplanétiques A. — Points stigmatiques B.

DIOPTRE SPHÉRIQUE. — La recherche des points stigmatiques est classique; la méthode suivante les donne tous d'une manière rapide; soient MI rayon incident, IC normale, IX rayon réfracté coupant MC en M'; MC perce la surface en J. *fig. (15)*

$$\widehat{MIC} = i \qquad \widehat{M'IC} = i' \qquad \widehat{IMC} = \alpha \qquad \widehat{IM'C} = \alpha'$$

$$ICJ = \Omega = \alpha + i = \alpha' + i'$$

$$\frac{MI}{\sin \Omega} = \frac{MC}{\sin i} = \frac{CI}{\sin \alpha} = \frac{MC + CI}{\sin i + \sin \alpha}$$

$$\frac{M'I}{\sin \Omega} = \frac{M'C}{\sin i'} = \frac{CI}{\sin \alpha'} = \frac{M'C + CI}{\sin i' + \sin \alpha'}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\sin i' + \sin \alpha'}{\sin i + \sin \alpha} \cdot \frac{MC + CI}{M'C + CI} = \frac{nMC}{n'M'C} = \frac{MI}{M'I}$$

Le point M étant supposé fixe, le point M', supposé stigmatique, ne change pas quand on fait varier α ; les deux rapports

$$\frac{MC + CI}{M'C + CI} \quad \text{et} \quad \frac{nMC}{n'M'C}$$

sont constants, donc $\frac{\sin i' + \sin \alpha'}{\sin i + \sin \alpha}$ est un rapport constant; pour

avoir la valeur de la constante, il suffit de faire $\alpha = 0$ et dès lors

$$MC + CJ = MJ, \quad M'C + CJ = M'J, \quad \text{donnent} \quad \frac{\sin i' + \sin \alpha'}{\sin i + \sin \alpha} = 1.$$

La condition: $\sin i' + \sin \alpha' = \sin \alpha + \sin i$ peut donc être regardée comme la condition du stigmatisme; elle devient en fonction de Ω :

$$\sin \frac{\Omega}{2} \cos \frac{i - \alpha}{2} = \sin \frac{\Omega}{2} \cos \frac{i' - \alpha'}{2}$$

1^{re} solution: $\Omega = 0$ $i = \alpha = i' = \alpha'$ $IC = MC = M'C$.
les deux points M et M' sont confondus au point J, un point quelconque de la surface du dioptré est un point stigmatique.

2^e solution:

$$i - \alpha = i' - \alpha' \quad i = i' \quad \alpha = \alpha' \quad \text{exige } i = i' = 0,$$

M et M' sont confondus au centre du dioptré qui est aussi un point stigmatique.

3^e solution:

$$i - \alpha = -(i' - \alpha') \quad i = \alpha' \quad i' = \alpha \quad MC = CI \frac{n'}{n}, \quad M'C = CI \frac{n}{n'},$$

les deux points M, M', points stigmatiques proprement dits du dioptré sont, en nombre infini, distribués sur une sphère objet de rayon $CM = -\frac{n'}{n} CI$, et une sphère image de rayon

$$CM' = -\frac{n}{n'} CI.$$

La première et la troisième solution ont plusieurs caractères communs:

1^o Ces points stigmatiques appartiennent à des surfaces lieux de points analogues, c'est-à-dire à des surfaces aplanétiques.

2^o Deux droites conjuguées passant par ces points font, avec le diamètre qui les contient, des angles dont les sinus sont dans un rapport constant; au point I, $\frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{n}{n'}$, aux points M, M',

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{n'}{n}; \text{ (condition des sinus).}$$

Ces deux rapports constants sont inverses l'un de l'autre, les points sur l'axe qui leur correspondent sont des points inverses.

3^o Enfin deux points quelconques des surfaces objets, et leurs conjugués sur les surfaces images sont liés par la relation

$$n MI = n' M'I = -R (n' \cos i' + n \cos i), \quad \text{où } IC = +R$$

Ce sont de tels points caractérisés par les deux conditions 1^o, 2^o, que nous appellerons points stigmatiques aplanétiques.

Le point stigmatique C est un point isolé, dont les propriétés ne se peuvent mettre en évidence, sous forme d'une relation entre les inclinaisons sur un diamètre, puisque ces angles sont égaux, nous trouverons la propriété caractéristique de points analogues dans l'étude des dioptries dont la méridienne est une conique.

Dioptre ellipsoïdal de révolution.

Les points stigmatiques du dioptre sont donnés comme nous, savons par l'équation qui annule la fonction d'aberration, cette équation peut être écrite

$$(n'\gamma_0 - n) \left[\frac{c^2}{nn'a^2} (n'\gamma_0 - n)^3 - (\gamma_0 - 1)^2 (n\gamma_0 - n') \right] = 0$$

la solution $\gamma_0 = \frac{n'}{n}$ donne le sommet du dioptre qui est évidemment un point stigmatique aplanétique; l'équation du 3^e degré qui demeure ne présente rien de remarquable si ce n'est dans des cas particuliers;

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c^2}{a^2} \frac{n'}{n} - n \right) \gamma_0^3 - \left[\left(3 \frac{c^2}{a^2} - 1 \right) n' - 2n \right] \gamma_0^2 \\ & + \left[\left(3 \frac{c^2}{a^2} - 1 \right) n - 2n' \right] \gamma_0 - \left(\frac{c^2}{a^2} \frac{n'}{n} - n' \right) = 0 \end{aligned}$$

tombe au second degré si $\frac{c}{a} = \frac{n}{n'}$ ou $\frac{c}{a} = \frac{n'}{n}$: dans le deuxième cas $n' < n$, l'une des racines devient nulle et des rayons parallèles à l'axe proviennent d'un foyer objet stigmatique; dans le premier cas $n' > n$, l'une des racines devient infinie, et des rayons parallèles à l'axe vont exactement converger au foyer image; on retrouve ainsi les points bien connus de Descartes.

Il est beaucoup plus intéressant de considérer le cas particulier de la réflexion pour lequel $n = -n'$; $\gamma_0 = -1$ est racine double de l'équation du 4^e degré, les deux autres racines fournies par :

$$- \frac{c^2}{a^2} (\gamma_0 + 1)^2 + (\gamma_0 - 1)^2 = 0 \quad \text{ont les deux valeurs inverses}$$

$$\gamma_0 = \frac{a+c}{a-c} \quad \gamma_0' = \frac{a-c}{a+c} \quad \text{qui conviennent aux deux foyers de l'ellipsoïde.}$$

La racine double représente deux surfaces aplanétiques confondues avec les deux surfaces images, les deux autres représentent des points parfaitement stigmatiques connus depuis longtemps; mais nous allons trouver bientôt en ces points d'intéressantes propriétés.

L'équation qui donne les points de Petzval du dioptré est

$$(n'\gamma - n) \left[\frac{1}{nn'} \frac{c^2}{a^2} (n'\gamma_0 - n) (n'\gamma - n) - (\gamma_0 - 1)^2 (n\gamma - n') \right] = 0$$

la solution $n'\gamma - n = 0$ donne la surface de Petzval constamment confondue avec la surface du dioptré; l'autre surface de Petzval dont la position dépend de γ_0 est donnée par

$$\gamma = \frac{a^2 nn'^2 (\gamma_0 - 1)^2 - nc^2 (n'\gamma_0 - n)^2}{a^2 n^2 n' (\gamma_0 - 1)^2 - n'c^2 (n'\gamma_0 - n)^2}$$

Si on diaphragme au sommet, $\gamma_0 = \frac{n}{n'}$, entraîne $\gamma = \frac{n'}{n}$, résultat conforme à la théorie générale; la surface de Petzval est alors stabilisée.

Dans le cas particulier du miroir, les deux surfaces de Petzval sont confondues sur la surface du dioptré.

On sait que la formule qui lie les distances q et q' , au point d'incidence I (*fig. 16*), d'un point et de sa focale tangentielle est :

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{2}{R \cos i}$$

i étant l'angle d'incidence et R le rayon de courbure compté, comme q et q' , à partir du point I en sens inverse de la propagation de la lumière incidente; la focale sagittale et le point étant en ligne droite avec le point où la normale coupe l'axe, la distance q'_1 , de la focale sagittale au point I est donnée par

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q_1} = \frac{2 \cos i}{\rho}$$

ρ = longueur de la normale jusqu'à l'axe.

Si i_0 est l'angle avec la normale de la droite D qui passe par le foyer F, on sait que $\rho = R \cos^2 i_0$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q_1} = \frac{2 \cos i}{R \cos^2 i_0}$; pour

toute direction passant par I et différente de D, i est différent de i_0 , q' et q_1' ont des valeurs différentes sauf pour $q = 0$ qui exige $q' = q_1' = 0$; le point d'incidence est un point double de la division homographique que forment les deux focales sur le rayon réfléchi, c'est le résultat déjà trouvé. Si $i = i_0$, on a constamment $q' = q_1'$, les deux focales coïncident sur le rayon réfléchi D' pour toute position du point sur D; c'est justement cette importante propriété qui définit les points stigmatiques que nous avons appelés B; on conçoit aisément l'importance de ces points.

La relation qui lie les inclinaisons u et u' de D et D' est donnée par

$$\frac{r}{\sin u'} = \frac{r'}{\sin u} = \frac{2c}{\sin(u' - u)} = \frac{2a}{\sin u' + \sin u}$$

r et r' étant les rayons vecteurs du point I, la dernière égalité donne

$$\operatorname{tg} \frac{u'}{2} : \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{a + c}{a - c} = \gamma_0$$

le retour inverse nous donnerait

$$\operatorname{tg} \frac{u'_1}{2} : \operatorname{tg} \frac{u_1}{2} = \frac{a - c}{a + c} = \gamma'_0;$$

chacun des foyers peut être considéré comme un point B, et ces deux points sont inverses; pour chacun d'eux le rapport $\operatorname{tg} \frac{u'}{2} : \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ est constant.

Nous pouvons prévoir que la différence $\gamma_s - \gamma_t$ sera nulle en tous les points de Petzval, en nombre infini, obtenus par diaphragmation au point F, la fonction de distorsion a pour expression

$$\frac{k}{4} (\gamma + 1) \left[(\gamma_0 - 1)^2 - \frac{c^2}{a^2} (\gamma_0 + 1)^2 \right]$$

et elle s'annule quel que soit γ_0 pour $\gamma = -1$, et quel que soit

$$\gamma \text{ pour } \gamma_0 = \frac{a + c}{a - c} \text{ et } \gamma'_0 = \frac{a - c}{a + c}$$

Cette propriété n'est pas limitée à la deuxième approximation : elle est à peu près évidente, car on doit avoir.

$$k_s \left(\frac{\sin u'}{\sin u} - \gamma_s \right) = k_t \left(\frac{du'}{du} - \gamma_t \right)$$

or $k_s = k_t \quad \frac{du'}{du} = \frac{\sin u'}{\sin u} \quad \text{donc} \quad \gamma_s = \gamma_t.$

Enfin la fonction du coma devient

$$\Phi = \frac{k}{4} (\gamma + 1)^2 \left[(\gamma_0 - 1) (\gamma - 1) - \frac{c^2}{a^2} (\gamma + 1) (\gamma_0 + 1) \right]$$

$\gamma = -1$ représente toujours un point double sans coma, mais si c n'est pas nul, aucune diaphragmation ne détermine une infinité de points sans coma; si on fait

$$\gamma_0 = \frac{a + c}{a - c} \quad \text{ou} \quad \frac{a + c}{a - c} \quad \Phi \text{ s'annule pour } \gamma = \gamma_0$$

les points de Petzval seront donc tous affectés de coma sauf le point d'incidence et le foyer.

On voit aisément quel parti on peut pratiquement tirer, par exemple pour la projection, d'un tel dispositif avec une source de lumière ponctuelle au point F, on a, sauf le coma, tous les avantages du miroir sphérique, dans une position où celui-ci est inutilisable (1).

L'étude précédente nous a montré que les points stigmatiques de l'axe pouvaient, dans certaines conditions, acquérir des propriétés fort intéressantes; nous allons préciser ces conditions.

Jusqu'ici on n'a étudié, d'ailleurs d'une façon assez sommaire, que deux types de points stigmatiques sur l'axe :

1° Un point stigmatique, dit d'Herschel, caractérisé comme on sait par l'existence de deux points stigmatiques sur l'axe, juxtaposés, c'est-à-dire, en interprétant la démonstration habituelle de la condition d'Herschel, situés à une distance infiniment petite qu'on regardera comme du premier ordre.

(1) Un cliché transparent, placé convenablement entre le point F et le miroir, donnera au delà du point F' une image qui correspondra point à point à l'objet; la figure 16 bis donne une idée d'un dispositif dans lequel la source lumineuse ponctuelle est en F, le miroir en MN, le cliché en AB, l'image en A'B'.

2^o Un point stigmatique, accompagné d'un deuxième point également stigmatique, situé en dehors de l'axe à une distance infiniment petite du premier ordre de cet axe, et à une distance du deuxième ordre d'un plan, normal à l'axe, passant par le point stigmatique de l'axe.

Nous compléterons cette étude par celle d'un point stigmatique que nous avons signalé sous le nom de point B, dont l'importance est aussi grande que celle du point aplanétique; mais nous démontrerons que le dispositif d'Herschel ne peut se rencontrer dans un système centré, et que la considération d'un tel point est complètement inutile.

CHAPITRE XI

Étude des points stigmatiques.

Une condition générale du stigmatisme.

Un point A (*fig. 17*) a son image stigmatique en A'; sur une direction AX dont la conjuguée est A'X', il existe nécessairement un point de Petzval que nous supposons en (X, X') distinct de (A, A'). Soit dans la section principale déterminée par AX, une direction voisine MY de conjuguée M'Y', sur cette direction il y aura, en général, deux points de Petzval réels, l'un P voisin de A, l'autre Y voisin de X dont les conjuguées seront P' et Y', soit l la distance infiniment petite AP et $l' = A'P'$; évaluons les deux rapports de convergence au point P; projetons P, sur l'axe en p , et sur AX, en q ; et de même P' en p' et q' ; on a

$$\gamma_s = n \overline{Pp} : n' \overline{P'p'} \qquad \gamma_t = n \overline{Pq} : n' \overline{P'q'};$$

si u et u' sont les inclinaisons de AX, A'X', Ω, Ω' les angles avec l'axe de AP, A'P'

$$\begin{aligned} \overline{Pp} &= l \sin \Omega & \overline{P'p'} &= l' \sin \Omega' & \overline{Pq} &= l \sin (\Omega - u) & \overline{P'q'} &= l' \sin (\Omega' - u') \\ \gamma_s &= \frac{nl \sin \Omega}{n'l' \sin \Omega'} & \gamma_t &= \frac{nl \sin (\Omega - u)}{n'l' \sin (\Omega' - u')} & \gamma_s : \gamma_t &= \frac{\sin (\Omega' - u')}{\sin \Omega'} : \frac{\sin (\Omega - u)}{\sin \Omega} \end{aligned}$$

mais les rapports de convergence en A sont

$$\Gamma_s = \frac{\sin u'}{\sin u} \qquad \Gamma_t = \frac{du'}{du} \qquad \Gamma_s : \Gamma_t = \frac{du}{\sin u} : \frac{du'}{\sin u'}$$

Or si nous faisons tendre MY vers AX, le point de Petzval P tend vers A, $nl, n'l'$ tendent vers 0 et $\frac{\gamma_s}{\gamma_t}$ tend vers $\frac{\Gamma_s}{\Gamma_t}$ on a donc à

$$\text{la limite :} \qquad \frac{du \sin (\Omega - u)}{\sin \Omega \sin u} = \frac{du' \sin (\Omega' - u')}{\sin \Omega' \sin u'}.$$

Ainsi, sauf le cas (que nous rencontrerons) où il n'y a pas de point de Petzval au voisinage du point stigmatique, les inclinaisons des rayons conjugués et celles des tangentes aux lieux des points de Petzval, sont liées par la relation.

$$(1) \quad du \left(\frac{1}{\operatorname{tg} u} - \frac{1}{\operatorname{tg} \Omega} \right) = du' \left(\frac{1}{\operatorname{tg} u'} - \frac{1}{\operatorname{tg} \Omega'} \right)$$

Si on suppose $\Omega = \Omega' = \frac{\pi}{2}$, la relation $\frac{du}{\operatorname{tg} u} = \frac{du'}{\operatorname{tg} u'}$ nous conduit à $\frac{\sin u'}{\sin u} = \gamma_0$, γ_0 étant une constante qui ne peut différer du rapport de convergence; ainsi la *condition des sinus* qui caractérise un point stigmatique α , sommet d'une surface de Petzval fixe, est une des conditions de l'aplanétisme d'un point A.

Une autre supposition, qui a quelque intérêt, consiste à admettre que AP, A'P' sont perpendiculaires à AX, A'X', $\Omega = \frac{\pi}{2} + u$, $\Omega' = \frac{\pi}{2} + u'$ et l'on a $\frac{du}{\sin u \cos u} = \frac{du'}{\sin u' \cos u'}$, d'où $\operatorname{tg} u' : \operatorname{tg} u = \gamma_0$ c'est la condition de Lagrange.

Mais dans deux cas importants, la relation devient illusoire :

1° Si $\Omega = \Omega' = 0$ ou π ; cette circonstance se présente si le point stigmatique est un point d'Herschel; la démonstration ne convient plus dans ce cas particulier, il faut lui donner une forme un peu différente;

2° Si $\Omega = u$, $\Omega' = u'$; ce cas particulier, que nous avons rencontré dans le miroir ellipsoïdal, correspond à une distribution des points de Petzval sur les directions AX, A'X'; le point P n'existe pas en dehors de AX, mais la démonstration subsiste, l'indétermination peut être levée.

Point stigmatique d'Herschel.

CONDITION D'HERSCHEL. — Soient H, H₁, de conjugués H' H'₁, les deux points stigmatiques infiniment voisins; le rapport de convergence tangentiel sera :

$$\gamma = \frac{n H H_1 \sin u}{n' H' H'_1 \sin u'}$$

si u, u' sont les inclinaisons des deux droites conjuguées passant par H, H' , mais : $\frac{n HH_1}{n' H' H'_1} = h^2$ en désignant par h le rapport de

convergence pour les rayons conjugués presque confondus avec l'axe; or $\gamma_t = \frac{du'}{du}$ et $\frac{du'}{du} = h^2 \frac{\sin u}{\sin u'}$, $du' \sin u' - h^2 du \sin u = 0$
 $\cos u' - h^2 \cos u = c'^2 = 1 - h^2 \quad 1 - \cos u' = h^2 (1 - \cos u)$

$$\sin \frac{u'}{2} : \sin \frac{u}{2} = h,$$

Equation des focales tangentielles. — La condition d'Herschel ainsi établie va nous permettre d'avoir l'équation des focales tangentielles sur deux droites conjuguées passant par H, H' ; soient T, T_1 , les points d'intersection de ces droites avec $H_1 T$ et $H'_1 T'$ qui font avec l'axe les angles $u + \delta u, u' + \delta u'$, ces points seront à la limite des focales tangentielles; le second point ayant des propriétés identiques à celles du premier, on a

$$\sin \frac{u' + \delta u'}{2} : \sin \frac{u + \delta u}{2} = h + \delta h$$

par suite
$$\frac{\delta u'}{2 \operatorname{tg} \frac{u'}{2}} - \frac{\delta u}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} = \frac{\delta h}{h}$$

si $HH_1 = \delta x \quad H'H'_1 = \delta x' \quad HT = t \quad H'T' = t'$

$$n \delta u = n \delta x \sin u = -k \delta h \sin u \quad n' t' \delta u' = n' \delta x' \sin u' = -\frac{k \delta h \sin u'}{h^2}$$

et
$$\delta h \left(\frac{h \cos^2 \frac{u}{2}}{nt} - \frac{\cos^2 \frac{u'}{2}}{hn't'} - \frac{1}{k} \right) = 0$$

δh étant différent de 0, la formule des focales tangentielles est

$$(2) \quad \frac{h \cos^2 \frac{u}{2}}{nt} - \frac{\cos^2 \frac{u'}{2}}{hn't'} - \frac{1}{k} = 0$$

ou, pour employer la notation habituelle,

$$(2') \quad \frac{h \cos \frac{u}{2} : \cos \frac{u'}{2}}{nl} = \frac{1}{n'l'h \cos \frac{u}{2} : \cos \frac{u'}{2}} = \frac{1}{k \cos \frac{u}{2} \cos \frac{u'}{2}}$$

$$h \cos \frac{u}{2} : \cos \frac{u'}{2} = \frac{du'}{du} = \gamma, \quad \text{et} \quad k \cos \frac{u}{2} \cos \frac{u'}{2} = k,$$

Revenons maintenant à la deuxième approximation et déterminons la surface de Petzval, qui existe nécessairement quand on diaphragme au point H; en posant

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{x} - \frac{u^2}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{x} \right) \quad \frac{1}{l'} = \frac{1}{x'} - \frac{u'^2}{2} \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{x'} \right)$$

ρ et ρ' étant comptés à partir du sommet

$$\frac{h}{nx} - \frac{1}{hn'x'} = \frac{1}{k} \quad \text{donne} \quad \frac{1}{n\rho} - \frac{1}{n\rho'} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{n'x'} - \frac{1}{nx} \right)$$

et
$$V = \frac{3}{2} \left(\frac{h\gamma}{k(h-\gamma)} - \frac{1}{k(h-\gamma)} \right)$$

de telle sorte que le rapport de convergence γ du sommet de la surface de Petzval est donné par

$$\gamma = \frac{h \frac{2kV}{3} + 1}{h + \frac{2kV}{3}} \quad \delta\gamma = \delta h \frac{\left(\frac{2kV}{3} \right)^2 - 1}{\left(h + \frac{2kV}{3} \right)^2}$$

la surface de Petzval qui n'est pas, en général, stabilisée, le sera pour

$$\frac{2kV}{3} = \pm 1 \quad \text{qui exige} \quad \gamma = \pm 1.$$

Équation des focales sagittales. — $\frac{1}{k_s} = \frac{\sin u'}{ns \sin u} - \frac{\sin u}{n's' \sin u'}.$

On obtiendra la valeur approchée de $\frac{1}{k_s}$ en donnant à s, s' les valeurs de l, l' , qui conviennent à la surface de Petzval

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{8} \left(\frac{h^3 + 3h - \gamma(3h^2 + 1)}{h - \gamma} + 4hkV \right) \right]$$

et en remplaçant γ par sa valeur

$$(3) \quad \frac{1}{k_s} = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{8} \left(h^2 + 8 \frac{kV}{3} h + 1 \right) \right]$$

au même degré d'approximation

$$(2^v) \quad \frac{1}{k_t} = \frac{1}{k} \left[1 + \frac{u^2}{8} (h^2 + 1) \right].$$

Expression des coefficients B, A, C au point d'Herschel. — La comparaison avec les formules générales (10) donne B à l'aide de l'une ou l'autre des formules,

$$\begin{aligned} 2 \left(h^2 + 2kVh + 1 - \frac{B}{k} \right) &= h^2 + 8 \frac{kV}{3} h + 1 \\ 2 \left(h^2 + 2kVh + 1 - \frac{3B}{k} \right) &= -(h^2 + 1) \\ B &= \frac{k}{2} \left(h^2 + 4 \frac{kV}{3} h + 1 \right) \end{aligned}$$

$$A \text{ est déterminé par } 2Ak h = 2Ah^2 + Bh = \frac{k}{2} (1 - h^2) h$$

$$\text{puisque } Ahu^2 = \frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{du'}{du} = h \frac{u^2}{4} (1 - h^2)$$

et enfin C sera donné par la fonction d'aberration égale à 0

$$A h^2 + Bh + C = 0.$$

On a dès lors les trois relations

$$\begin{aligned} A_2 h^2 + B_2 - k) h + \frac{B_1 - 2k^2V}{4} &= -\frac{k}{2} h - \frac{k^2V}{3} \\ B_2 h^2 + B_1 h + B_0 &= \frac{k}{2} h^2 + 2 \frac{k^2V}{3} h + \frac{k}{2} \\ \frac{B_1 - 2k^2V}{4} + (B_0 - k) h + C_0 &= -\frac{k^2V}{3} h^2 - \frac{k}{2} h \end{aligned}$$

qui peuvent fournir trois des cinq coefficients.

On pourra donc écrire les fonctions caractéristiques avec deux paramètres seulement.

$$Q = A_2(\gamma_0 - h)^2 (\gamma - h)^2 + (2A_2h + B_2)(\gamma_0 - h)^2 (\gamma - h) \\ + (2A_2h + B_2 - k)(\gamma_0 - h)(\gamma - h)^2 + \frac{k}{2}(\gamma_0 - h) \left[\left(h + \frac{2kV}{3} \right) (\gamma_0 - h) \right. \\ \left. + h^2 - 1 \right] - \frac{k}{2}(\gamma - h) \left[\left(h + \frac{2kV}{3} \right) (\gamma - h) + h^2 - 1 \right]$$

$$\text{et par suite } P = A_2(\gamma_0 - h)^3 \left(\gamma_0 + 3h + \frac{2B_2 - k}{A_2} \right).$$

Cette dernière formule nous montre que non seulement h est racine double, comme l'exige la définition du point, mais encore rapide triple.

Nous n'écrirons pas la fonction de coma, car nous allons voir, en l'établissant par une autre voie, que le nombre des coefficients va encore être réduit.

Calcul de la variation du chemin optique aux points d'intersection de deux droites conjuguées passant par les points d'Herschel.

I. TERMES DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE. — Soient $\Omega = [HH']$, $\Omega_1 = [H_1H'_1]$ les longueurs optiques de tous les chemins cartésiens qui vont soit de H à H' , soit de H_1 à H'_1 , on a $\Omega = nHH_1 + \Omega_1 - n'H'H'_1$, n et n' étant les indices extrêmes.

Soient HT , H_1T , deux droites d'inclinaison u et $u + \partial u$, dont les conjuguées d'inclinaison u' et $u' + \partial u'$ se coupent en T' ; écrivons les chemins optiques qui passent par T et T'

$$\Omega = nHT + [TT'] - n'H'T', \quad \Omega_1 = nH_1T + [TT']_1 - n'H'_1T'_1,$$

$$\text{si } \Delta = [TT']_1 - [TT']$$

$$\text{on aura : } \Delta = (\Omega_1 - \Omega) - n(H_1T - HT) + n'(H'_1T' - H'T') \\ = -n[HH_1 + H_1T - HT] + n'[H'H'_1 + H'_1T' - H'T']$$

$$\text{mais } \frac{H_1T}{\sin u} = \frac{HT}{\sin(u + \partial u)} \quad \frac{HH_1}{\sin \partial u} = \frac{HH_1 + H_1T - HT}{\sin(u + \partial u) - \sin u - \sin \partial u}$$

avec des formules analogues pour l'espace image, il en résulte

$$\Delta = nHH_1 \frac{\sin(u + \delta u) - \sin u - \sin \delta u}{\sin \delta u} \\ - n'H'H'_1 \frac{\sin(u' + \delta u') - \sin u' - \sin \delta u'}{\sin \delta u'}$$

soit

$$\Delta = -2nHH_1 \sin \frac{u}{2} \left(\sin \frac{u}{2} + \cos \frac{u}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta u}{2} \right) \\ + 2n'H'H'_1 \sin \frac{u'}{2} \left(\sin \frac{u'}{2} + \cos \frac{u'}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta u'}{2} \right)$$

si on remplace HH_1 par $-k\delta h$ et $H'H'_1$ par $-k \frac{\delta h}{h(h + \delta h)}$,

$$\Delta = 2k\delta h \left(\sin^2 \frac{u}{2} - \frac{1}{h^2} \sin^2 \frac{u'}{2} + \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \times \frac{\delta u}{2} \right. \\ \left. - \frac{1}{h^2} \sin \frac{u'}{2} \cos \frac{u'}{2} \times \frac{\delta u'}{2} + \frac{\delta h}{h^3} \sin \frac{2u'}{2} \right)$$

Or la variation du chemin optique est au plus du troisième ordre; si on annule les termes du premier ordre, on a la condition d'Her-schel : $\sin \frac{u}{2} = \frac{1}{h} \sin \frac{u'}{2}$; si, dans le terme du 2^e ordre, nous faisons

la substitution : $\delta u = -\frac{k\delta h \sin u}{nt}$ $\delta u' = -\frac{k\delta h \sin u'}{h^2 n't'}$

t et t' étant les distances au point T (γ), en écrivant que ce terme est nul, nous obtenons l'équation des focales tangentielles

$$\frac{h \cos^2 \frac{u}{2}}{nt} = \frac{\cos^2 \frac{u'}{2}}{h n't'} = \frac{1}{k}$$

II. TERMES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME ORDRE. — Repre-nons Δ sous la forme exacte.

$$\Delta = 2k\delta h \left(\frac{\sin \frac{u}{2} \sin \frac{u + \delta u}{2}}{\cos \frac{\delta u}{2}} - \frac{\sin \frac{u'}{2} \sin \frac{u' + \delta u'}{2}}{\cos \frac{\delta u'}{2} \cdot h(h + \delta h)} \right)$$

l'application à *chacun* des points H, H₁, de la condition d'Herschel nous donne :

$$\sin \frac{u}{2} : \sin \frac{u'}{2} = h \quad \sin \frac{u' + \partial u'}{2} : \sin \frac{u + \partial u}{2} = h + \partial h$$

$$\text{dès lors} \quad \Delta = 2k\partial h \sin \frac{u}{2} \sin \frac{u + \partial u}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\partial u}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\partial u'}{2}} \right)$$

et si nous ne conservons que les termes en ∂u^3 , ∂u^4 , après avoir remplacé ∂h à l'aide de la formule $\frac{-k\partial h}{\sin \partial u} = \frac{+k(h-\gamma)}{\sin(u+\partial u)}$ qui n'introduit qu'une erreur en $u^3 \partial u^3$ et en $u^2 \partial u^4$

$$\Delta = -k(\gamma - h) \frac{u\partial u}{2} \left(\frac{\partial u'^2}{8} - \frac{\partial u^2}{8} \right) = \frac{u\partial u^3}{4} \left[-\frac{k}{4} (\gamma - h) (\gamma^2 - 1) \right] + M u^2 \frac{\partial u^4}{8};$$

or le coefficient de $\frac{u\partial u^3}{4}$ est, comme nous l'avons vu (5. 2^e §) la fonction de coma au point (H, H'); cette fonction de coma est donc

$$\Phi_h = -\frac{k}{4} (\gamma - h) (\gamma^2 - 1)$$

qui montre que sur une direction passant par le point d'Herschel, le coma n'est nul qu'au point d'Herschel lui-même et aux points nodaux (tangentiels) ou anti-nodaux; et ainsi se trouve confirmé que si $\frac{2kV}{3} = \pm 1$, la surface de Petzval vient se confondre avec celle de Fermat et se trouve stabilisée pour $\gamma = \pm 1$.

En identifiant Φ_h avec son expression tirée de la forme générale on trouverait pour les coefficients les valeurs déjà calculées, et en plus la relation

$$2B_2 - k = -2\Lambda_2 h$$

qui donne pour Φ , Q, P les valeurs

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[\Lambda_2 (\gamma - h)^3 + \frac{k}{4} (\gamma^2 - 1) \right] (\gamma_0 - h) - \frac{k}{4} (\gamma^2 - 1) (\gamma - h) \\ Q &= \Lambda_2 (\gamma_0 - h)^2 (\gamma - h)^2 - \frac{k}{2} (\gamma - \gamma_0) \left[\frac{2kV}{3} (\gamma - \gamma_0) + \gamma\gamma_0 - 1 \right] \\ P &= \Lambda_2 (\gamma_0 - h)^4 \end{aligned}$$

en vertu de cette dernière, h est racine quatrième de la fonction d'aberration.

Inexistence du point d'Herschel.

Si nous rappelons que dans la variation du chemin optique le coefficient constant de $\frac{\partial u^4}{8}$ est la fonction d'aberration au point γ , nous voyons que la fonction d'aberration est nulle puisque ce coefficient Mu^2 ne présente pas de terme constant; il ne peut donc exister de point d'Herschel, h , que si tous les points de l'axe sont stigmatiques.

Cette conclusion est assez importante pour qu'il soit bon de la retrouver et de la compléter par une autre voie.

La valeur exacte de la variation de la longueur optique est

$$\Delta = 2k\delta h \sin \frac{u}{2} \sin \frac{u + \partial u}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\partial u}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\partial u'}{2}} \right).$$

Aux points nodaux et anti-nodaux tangentiels, on a $\partial u' = \pm \partial u$ et Δ est nulle exactement, il en résulte que ces points sont non seulement des points sans coma, mais des points stigmatiques pour les rayons contenus dans la section principale; si on fait tourner le rayon autour du point objet, le conjugué tourne autour du point image; il en résulte encore que ces points sont des focales tangentielles aussi bien sur la droite qui passe par H que sur celle qui passe par H_1 ; si on désigne par T_N le point nodal tangentiel, on aura

$$\begin{aligned} n\overline{HT}_N &= k \cos \frac{u'}{2} \cos \frac{u}{2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{u'}{2}}{\operatorname{tg} \frac{u}{2}} - 1 \right) \\ n'\overline{H'T'_N} &= k \cos \frac{u'}{2} \cos \frac{u}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\operatorname{tg} \frac{u'}{2}} \right) \\ n\overline{HT}_N \operatorname{tg} \frac{u}{2} &= n'\overline{H'T'_N} \operatorname{tg} \frac{u'}{2} = k \sin \frac{u' - u}{2} \end{aligned}$$

désignons par q, q' , les distances à l'axe des points nodaux tangentiels objet et image ($nq = q'n'$ si les points sont réellement stigmatiques). Ces égalités deviennent

$$\frac{nq \operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\sin u} = \frac{n'q' \operatorname{tg} \frac{u'}{2}}{\sin u'} = k \sin \frac{u' - u}{2}$$

ou

$$\frac{nq}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} = \frac{n'q'}{2 \cos^2 \frac{u'}{2}} = k \sin \frac{u' - u}{2}$$

Soit δ la valeur commune de $\delta u, \delta u'$; q et q' sont les mêmes pour le second rayon et on a évidemment à cause de la remarque relative aux focales tangentielles :

$$\frac{nq}{2 \cos^2 \frac{u + \delta}{2}} = \frac{n'q'}{2 \cos^2 \frac{u' + \delta}{2}} = k \sin \frac{u' - u}{2}$$

qui, puisque δ est une quantité infiniment petite non nulle, conduisent à la relation, absurde si u' est différent de u ,

$$\cos^2 \frac{u + \delta}{2} \cos^2 \frac{u'}{2} = \cos^2 \frac{u' + \delta}{2} \cos^2 \frac{u}{2} \quad (1) \quad \text{ou} \quad \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{u' - u}{2} = 0$$

Un calcul identique conduit, en écrivant les distances aux points H, H', H_1, H'_1 , des points anti-nodaux tangentiels, et en désignant par q_1, q'_1 , les distances à l'axe de ces derniers points, aux relations :

$$\frac{nq_1}{\cos^2 \frac{u}{2}} = - \frac{n'q'_1}{\cos^2 \frac{u'}{2}} = 2k \sin \frac{u + u'}{2}$$

et en posant $\delta u = -\delta u' = \delta$

$$\frac{nq_1}{\cos^2 \frac{u + \delta}{2}} = - \frac{n'q'_1}{\cos^2 \frac{u' - \delta}{2}} = 2k \sin \frac{u + u'}{2}$$

d'où $\cos \frac{u'}{2} \cos \frac{u + \delta}{2} = \cos \frac{u}{2} \cos \frac{u' - \delta}{2} \quad \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{u + u'}{2} = 0$

(1) La racine négative ne peut convenir.

Si h est différent de ± 1 on a donc dans l'un et l'autre cas, $\sin \frac{\delta}{2} = 0$; or si H et H' sont deux points infiniment voisins distincts, δ ne peut être nul que si les points nodaux et anti-nodaux sont à l'infini; les focales tangentielles constituent un système afocal sur toutes les directions passant par H , H' , et par suite le système est nécessairement afocal sur l'axe; or dans ce système afocal la fonction d'aberration, supposée nulle aux points H , H' , est nulle en tous les points de l'axe; le système est stigmatique pour tous les points de l'axe.

On pourrait supposer que les conditions précédentes peuvent être satisfaites pour une valeur infiniment petite, non nulle, de δ ; si

$$u = \pm u' \qquad h = \pm 1.$$

prenons la première hypothèse $h = +1$; la fonction d'aberration s'écrit alors

$$(c) \qquad P = \Lambda_2 (\gamma_0 - 1)^4$$

mais, d'après le raisonnement précédent, et puisque pour $\delta u = -\delta u'$ la variation du chemin optique Δ est rigoureusement nulle, le point anti-nodal tangentiel est rigoureusement stigmatique pour les rayons appartenant à la section principale; cette propriété s'étend évidemment au point anti-nodal de Gauss et dès lors — 1 doit être racine de $P = 0$, ce qui est contradictoire avec la forme (c).

On raisonnerait de la même manière pour $h = -1$, et on arriverait à une contradiction analogue; donc même dans un système centré dont l'unique point stigmatique (quadruple) est le point nodal ou le point anti-nodal, ce point ne peut être considéré comme un point d'Herschel.

CONCLUSION. — *Il ne peut exister de point d'Herschel en dehors d'un système afocal dont tous les points de l'axe sont stigmatiques.*

Cela n'entraîne pas que la condition d'Herschel et les conditions subséquentes que nous avons rencontrées, soient dénuées de sens; nous allons voir dans le paragraphe suivant à quels systèmes elles correspondent.

Systèmes centrés à points stigmatiques multiples. Systèmes stigmatiques.

Nous allons comparer les conditions tirées de $\Delta = 0$ à celles qu'introduit la multiplicité du point stigmatique σ .

1^o *Point double.* — P, ayant une racine double, σ s'écrira

$$P = (\gamma_0 - \sigma)^2 \left[A_2 (\gamma_0^2 + 2\sigma\gamma_0 + 3\sigma^2) + (2B_2 - k) (\gamma_0 + 2\sigma) + \frac{3B_1 - 2k^2V}{2} \right]$$

$$\text{avec } B_0 = -2A_2\sigma^3 - 3\left(B_2 - \frac{k}{2}\right)\sigma^2 - \frac{3B_1 - 2k^2V}{2}\sigma + \frac{k}{2}$$

cela entraîne pour D_σ

$$D_\sigma = - (B_2\sigma^2 + B_1\sigma + B_0) \gamma - 2 \left[\frac{B_1 - 2k^2V}{4} \sigma^2 + (B_0 - k) \sigma + C_0 \right]$$

$$D_\sigma = - (\gamma - \sigma) \left[2A_2\sigma^3 + \left(2B_2 - \frac{3K}{2}\right)\sigma^2 + \frac{B_1 - 2k^2V}{2} - \frac{k}{2} \right] - \frac{k}{2}\sigma(\sigma^2 - 1)$$

$$Q_\sigma = (\gamma - \sigma) \left[\left(A_2\sigma^2 + (B_2 - k) \sigma + \frac{B_1 - 2k^2V}{4} \right) (\gamma - \sigma) - \frac{k}{2} (\sigma^2 - 1) \right]$$

$$\Phi_\sigma = (\gamma - \sigma) \left\{ \left[A_2\sigma (\gamma + 2\sigma) + \left(\frac{B_2}{2} - \frac{k}{4} \right) (\gamma + 5\sigma) + \frac{3B_1 - 2k^2V}{4} \right] (\gamma - \sigma) - \frac{k}{4} (\gamma^2 - 1) \right\}$$

Les valeurs des fonctions d'astigmatisme et de coma sont fort différentes de celles que fournit l'étude du point d'Herschel; en revanche, la fonction de distorsion, au point stigmatique ($\gamma_0 = \sigma$),

est la même que celle que l'on tire de $\sigma = \sin \frac{u'}{2} : \sin \frac{u}{2}$.

Il suit de là que la condition d'Herschel, $\sin \frac{u'}{2} : \sin \frac{u}{2} = \sigma$ doit être regardée simplement comme la condition qui exprime le point stigmatique σ est point double, que σ est racine double de $P = 0$; par conséquent, les incompatibilités des diverses conditions se réduisent à ceci : un point A, comme un point B, ne peuvent être points

doubles que si les conditions deviennent compatibles c'est-à-dire si $\alpha = \pm 1$ ou $\beta = \pm 1$.

2° *Point triple.* — $P = (\gamma_0 - \sigma)^3 \left[A_2 (\gamma_0 + 3\sigma) + 2B_2 - k \right]$
avec

$$B_1 = -4A_2\sigma^2 - 2(2B_2 - k)\sigma + \frac{2}{3}k^2V$$

$$\frac{B_1}{4} = -A_2\sigma^2 - \left(B_2 - \frac{k}{2}\right)\sigma + \frac{k^2V}{6}$$

$$\frac{B_1 - 2k^2V}{4} = -A_2\sigma^2 - (B_2 - k)\sigma - \frac{k}{2}\sigma - \frac{k^2V}{3}$$

$$D_\sigma = -\frac{k}{2} \left[(\gamma - \sigma) \left(\sigma^2 + 4\frac{kV}{3}\sigma + 1 \right) + \sigma(\sigma^2 - 1) \right]$$

$$Q_\sigma = -\frac{k}{2} (\gamma - \sigma) \left[\left(\sigma + \frac{2kV}{3} \right) (\gamma - \sigma + \sigma^2 - 1) \right]$$

$$\Phi_\sigma = (\gamma - \sigma) \left[\left(A_2\sigma + \frac{B_2}{2} - \frac{k}{4} \right) (\gamma - \sigma)^2 - \frac{k}{4} (\gamma^2 - 1) \right]$$

D_σ et Q_σ ont les mêmes valeurs qu'au point d'Herschel; de plus si on remarque que le coefficient de γ dans D_σ est $-B$, on voit que les valeurs de $\frac{1}{k_s}$ et de $\frac{1}{k_t}$ sont aussi les mêmes, dès lors :

Les formes (2), (3) des équations des focales sagittales et des focales tangentielles, peuvent être regardées comme la condition du point triple.

3° *Point quadruple.* — $P = A_2(\gamma_0 - \sigma)^4$ avec $B_2 = -2A_2\sigma + \frac{k}{2}$

Les valeurs de D_σ et Q_σ ne sont pas altérées et Φ_σ devient

$$\Phi_\sigma = -\frac{k}{4} (\gamma - \sigma) (\gamma^2 - 1)$$

les trois points sans coma sont : le point quadruple, le point nodal et le point anti-nodal (tangentiels).

4° *Systèmes stigmatiques sur l'axe.* — On réalisera en deuxième approximation un système stigmatique sur l'axe, en égalant à 0 les cinq coefficients de la fonction d'aberration.

Seulement, on pourra reprendre pour deux points quelconques infiniment voisins le raisonnement déjà fait, et montrer que les

points nodaux et anti-nodaux tangentiels ne peuvent être à distance finie (à moins qu'ils ne soient sur l'axe); il en résulte cette proposition :

Un système centré ne peut être stigmalique pour tous les points de son axe que s'il est afocal, et si deux droites parallèles quelconques rencontrant cet axe, ont pour conjuguées deux droites également parallèles.

Si les points de l'axe sont tous des points nodaux, ou des points anti-nodaux, le système est encore afocal.

CHAPITRE XII

Points stigmatiques d'Abbe, points a, A.

Au voisinage du point stigmatique (A, A') (*fig. 19*) placé sur l'axe d'un système centré, on suppose un deuxième point $A_1 A_1'$, également stigmatique, ayant pour coordonnées g et h , l'abscisse g étant du 2^e ordre tandis que h est du premier; la symétrie exige que le système présente un nombre infini de points stigmatiques distribués sur la circonférence de rayon h ; en particulier le point A_2 symétrique de A_1 doit être stigmatique comme A_1 .

CONDITION DES SINUS. — *Points stigmatiques de Abbe.* Menons deux droites AM, A_2M dont les conjuguées seront $A'M', A_2'M'$, soient v, v' , les angles formés, par les droites données en M , et par leurs conjuguées en M' , désignons par l la longueur AA_1 et par ω l'angle $B \hat{A} \hat{A}_1$ ($A' \hat{A}_1' = l', B' \hat{A}' \hat{A}_1' = \omega'$)

Exprimons la variation du chemin optique $[A_2 A_2'] - [AA'] = \Delta$
 $[A_2 A_2'] = n A_2 M + [MM']_2 - n' A_2' M', [AA'] = n AM - [MM'] - n' A' M'$;
 si nous posons $[MM']_2 - [MM'] = \delta$ nous aurons $\Delta - \delta = n (A_2 M - AM) - n' (A_2' M' - A' M')$, égalité dans laquelle δ est une quantité de l'ordre de v^3 . Mais nous avons:

$$\frac{l}{\sin v} = \frac{A_2 M}{\cos(\omega - u)} = \frac{AM}{\cos(\omega - u - v)} = \frac{A_2 M - AM}{-2 \sin \frac{v}{2} \sin \left(\omega - u - \frac{v}{2} \right)}$$

$$A_2 M - AM = -l \frac{\sin \left(\omega - u - \frac{v}{2} \right)}{\cos \frac{v}{2}} = -G + H \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

si $G = l \sin(\omega - u) \quad H = l \cos(\omega - u)$

$$\text{et } A_2' M' - A' M' = -l' \frac{\sin \left(\omega' - u' - \frac{v'}{2} \right)}{\cos \frac{v'}{2}} = -G' + H' \operatorname{tg} \frac{v'}{2}$$

$$\text{si} \quad G' = l' \sin (\omega' - u') \quad H' = l' \cos (\omega' - u')$$

$$\text{d'où} \quad \Delta - \delta = -nG + n'G' + nH \operatorname{tg} \frac{v}{2} - n'H' \operatorname{tg} \frac{v'}{2}$$

Ne conservons que les termes du premier ordre; nous aurons

$$\Delta = nh \sin u - n'h' \sin u',$$

Si on veut que Δ , h , h' soient des constantes quels que soient u et u' il faut : 1° que A_2 soit stigmatique pour les rayons de la section principale; 2° Que Δ soit nulle (ou d'un ordre supérieur au premier); on obtient ainsi la relation des sinus

$$\lim \frac{nh}{n'h'} = \alpha = \frac{\sin u'}{\sin u}$$

Mais si, au lieu de considérer des angles, u , u' quelconques, on se place dans les conditions de la deuxième approximation, il n'est plus nécessaire que A_2 soit stigmatique, il suffit que ce soit un point sans coma (point de Fermat); de telle sorte que la relation des sinus traduite en deuxième approximation par une seule condition, exprime uniquement qu'il passe toujours, quel que soit le point diaphragmé, une surface de Fermat par le point stigmatique A.

C'est le dispositif, défini comme nous venons de le dire que nous appellerons *point stigmatique d'Abbe*.

II. EQUATION DES FOCALLES TANGENTIELLES. — $\frac{nh \sin u}{n'h' \sin u'}$ tend vers 1 pour $h = 0$, or le rapport $nh : n'h'$ est une fonction paire de h puisqu'il a la même valeur en A_1, A_2 ; on pourra donc écrire :

$$\frac{nh}{n'h'} = \alpha (1 - fnh, n'h') \quad \frac{nh \sin u}{n'h' \sin u'} = 1 - fnh n'h'$$

la différence $nh \sin u - n'h' \sin u'$ est donc du 3^e ordre, et elle peut être négligée dans l'expression de Δ , où l'on ne conserve que es termes du 2^e ordre: ceux-ci pourront eux-mêmes être modifiés au moyen de la relation $nh \sin u = n'h' \sin u'$; on pourra donc écrire

$$\Delta = -ng \cos u + n'g' \cos u' + nH \operatorname{tg} \frac{v}{2} - n'H' \operatorname{tg} \frac{v'}{2}$$

A l'approximation envisagée $g = \frac{h^2}{2R}$, $g' = \frac{h'^2}{2R'}$, R et R'

étant les rayons de courbure au sommet, de la surface objet et de la surface image; de plus, H étant la longueur de la perpendiculaire abaissée de A_2 sur AM, $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$ peut être remplacée par $\frac{H}{2l}$, l étant l'abscisse de la focale tangentielle T, limite de M, lorsque H tend vers 0; on peut enfin remplacer H^2 par h^2 , de telle sorte que l'on a

$$\Delta = \frac{nhn'h'}{2} \left(-\frac{\alpha \cos u}{nR} + \frac{\alpha \cos^2 u}{nt} + \frac{1}{\alpha} \frac{\cos u'}{n'R'} - \frac{\cos^2 u'}{\alpha n't'} \right)$$

$$\frac{2\Delta}{nhn'h'} = \frac{\alpha \cos^2 u}{nt} - \frac{\cos^2 u'}{\alpha n't'} + \frac{1}{\alpha} \frac{\cos u'}{n'R'} - \frac{\alpha \cos u}{nR}$$

mais le premier membre, indépendant de u , doit conserver la même valeur pour $u = 0$, $u' = 0$,

$$\frac{2\Delta}{nhn'h'} = \frac{\alpha}{nt_0} - \frac{1}{n't_0\alpha} + \frac{1}{\alpha n'R'} - \frac{\alpha}{nR} = \frac{1}{k} + \frac{1}{\alpha n'R'} - \frac{\alpha}{nR}$$

t_0 et t'_0 étant les abscisses des points conjugués de Gauss, vers lesquels tendent les focales tangentielles T, T' pour $u = 0$.

$$\frac{\alpha \cos^2 u}{nt} - \frac{\cos^2 u'}{\alpha n't'} = \frac{1}{k} - \frac{\alpha}{nR} (1 - \cos u) + \frac{1}{\alpha n'R'} (1 - \cos u')$$

sera donc l'équation des focales tangentielles sur AM qu'on ramènera à la forme canonique en écrivant (puisque $\alpha_i = \frac{du'}{du} = \alpha \frac{\cos u}{\cos u'}$;

$$\alpha_i - \frac{1}{nt} = \frac{1}{\alpha_i n't'} = \frac{1}{k \cos u \cos u'} \left[1 - 2k \left(\frac{\alpha}{nR} \sin^2 \frac{u}{2} - \frac{\sin^2 \frac{u'}{2}}{\alpha n'R'} \right) \right] = \frac{1}{k_i}$$

III. EQUATION DES FOCALES SAGITTALES. — Envisageons les rayons conjugués passant par les points A_1, A'_1 , et touchant les mêmes caustiques que les rayons déjà considérés; ces rayons font avec AM et avec $A'M'$ les angles v_1, v'_1 ; les équations des focales sagittales sur ces couples de droites sont respectivement

$$\frac{\sin(u' + v')}{ns_2 \sin(u + v)} - \frac{\sin(u + v)}{n's'_2 \sin(u' + v')} = \frac{1}{k_{s_2}}$$

$$\frac{\sin(u' - v'_1)}{ns_1 \sin(u - v_1)} - \frac{\sin(u - v_1)}{n's'_1 \sin(u' - v'_1)} = \frac{1}{k_{s_1}}$$

Si on exprime que les points Λ_2, Λ'_2 appartiennent à la première division homographique et Λ_1, Λ'_1 à la seconde :

$$\frac{\sin(u' + v')}{-nh} - \frac{\sin(u + v)}{-n'h'} = \frac{1}{k_{s_1}}, \quad \frac{\sin(u' - v'_1)}{nh} - \frac{\sin(u - v_1)}{n'h'} = \frac{1}{k_{s_2}}$$

$$\frac{1}{k_{s_1}} + \frac{1}{k_{s_2}} = \frac{2 \sin \frac{v + v_1}{2} \cos \left(u + \frac{v - v_1}{2} \right)}{n'h'} - \frac{2 \sin \frac{v' + v'_1}{2} \cos \left(u' + \frac{v' - v'_1}{2} \right)}{nh}$$

si on néglige les quantités du deuxième ordre on pourra écrire

$$l(v + v_1) = 2h \cos u \quad l'(v' + v'_1) = 2h' \cos u'$$

l et l' définissant les positions limités des points d'intersection lorsque h tend vers 0, et l'on aura

$$\frac{2 \frac{nh}{n'h'} \cos^2 u}{nl} - \frac{2 \frac{n'h'}{nh} \cos^2 u'}{n'l'} = \frac{1}{k_{s_1}} + \frac{1}{k_{s_2}}$$

Si on fait tendre h vers 0, $\frac{1}{k_{s_1}}, \frac{1}{k_{s_2}}$ tendent vers $\frac{1}{k_s}, \frac{nh}{n'h'}$ vers α

et à la limite : $\frac{\alpha}{ns} - \frac{1}{\alpha n's'} = \frac{1}{k_s} = \frac{\alpha \cos^2 u}{nl} - \frac{\cos^2 u'}{\alpha n'l'}$

$$= \frac{\cos u \cos u'}{k_i} = \frac{1}{k} \left[1 - 2k \left(\frac{\alpha \sin^2 \frac{u}{2}}{nR} - \frac{\sin^2 \frac{u'}{2}}{\alpha n'R'} \right) \right]$$

qui est l'équation des focales sagittales sur AM, A'M'.

CONDITION DE L'APLANÉTISME ÉLÉMENTAIRE. — La surface de Petzval produite par diaphragmation au point stigmatique considéré coupe l'axe au point inverse; cette proposition, déjà rencontrée, va être retrouvée sous une forme qui détermine la surface de Petzval. Si ρ et ρ' sont sur AM, A'M', les abscisses des points de Petzval, on a $n\rho = nl = ns$ $n'\rho' = n'l' = n's'$, l'égalité précédente nous donne $\frac{\alpha \sin^2 u}{n\rho} - \frac{\sin^2 u'}{\alpha n'\rho'} = 0$ ou, $n\rho = n'\rho'$; tous les

points de la surface de Petzval sont inverses du point A, sur toutes les droites conjuguées passant par A, A'; en ces points on a :

$$\gamma_s = \frac{1}{x} \quad \gamma_t = \frac{1 \cos u'}{x \cos u} = \frac{1}{x_t}$$

Cette condition détermine les surfaces de Petzval et *a foriori* leurs rayons de courbure R_1, R'_1 , si ρ_0 est la valeur de ρ pour $u = 0$, on a

$$\frac{1}{n\rho} = \frac{1}{n\rho_0} - \frac{u^2}{2} \left(\frac{1}{nR_1} + \frac{1}{nx} \right) \text{ de même } \frac{1}{n'\rho'} = \frac{1}{n'\rho'_0} - \frac{u'^2}{2} \left(\frac{1}{n'R'_1} + \frac{1}{n'x'} \right)$$

$$\text{et par soustraction} \quad \frac{u^2}{2} \left(\frac{1}{nR_1} + \frac{1}{nx} \right) - \frac{u'^2}{2} \left(\frac{1}{n'R'_1} + \frac{1}{n'x'} \right) = 0$$

$$\frac{1}{nR_1} - \frac{x^2}{n'R'_1} = -\frac{1}{nx} + \frac{x^2}{n'x'} \text{ et comme } x = \frac{1}{\gamma} \text{, au point inverse,}$$

$$\frac{\gamma}{nR_1} - \frac{1}{\gamma n'R'_1} = -\frac{\gamma}{nx} - \frac{1}{\gamma n'x'} = \frac{1}{k}$$

les surfaces de Petzval déterminée par diaphragmation au point A, sont telles que le centre de courbure de la surface image, est conjugué de Gauss du centre de courbure de la surface objet; d'ailleurs, ces rayons de courbure qui sont liés par la relation de Petzval

$$\frac{1}{nR_1} - \frac{1}{n'R'_1} = V,$$

$$\text{valent respectivement} \quad R_1 = \frac{1}{n} \frac{\gamma - \frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{k} - \frac{\gamma}{\gamma}} \quad R'_1 = \frac{1}{n'} \frac{\gamma - \frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{k} - \frac{\gamma}{\gamma}}.$$

Deuxième approximation

Nous avons jusqu'ici supposé u quelconque et nous avons successivement étudié les termes en h du premier ordre et du deuxième; admettons maintenant que les angles u et u' sont des infiniment petits du premier ordre, et étudions la variation du chemin optique déjà envisagée, en conservant les termes en v^3 et v^4

$$\Delta - \delta = -nG + n'G' + nH \operatorname{tg} \frac{v}{2} - n'H' \operatorname{tg} \frac{v'}{2},$$

pour évaluer $nH \operatorname{tg} \frac{v}{2} - n'H' \operatorname{tg} \frac{v'}{2}$, exprimons AM en fonction de $\operatorname{tg} v$

$$AM = \frac{l \cos (\omega - u - v)}{\sin v} = G + \frac{\operatorname{tg} v}{H} \quad \text{de même} \quad A'M' = G' + \frac{H'}{\operatorname{tg} v'}$$

$$\text{ou encore } AM = G - \frac{H \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{2} + \frac{H}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2}}, \quad A'M' = G' - \frac{H' \operatorname{tg} \frac{v'}{2}}{2} + \frac{H'}{2 \operatorname{tg} \frac{v'}{2}}$$

or si on désigne le point où AM touche la caustique par son rapport de convergence γ_i , et si ε est la distance de cette focale au point M, tandis que ε' est la distance de la focale conjuguée au point M' :

$$nAM = -k_i (\gamma_i - \alpha_i) + n\varepsilon \quad n'A'M' = k_i \left(\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\alpha_i} \right) + n'\varepsilon'$$

$$\gamma_i = \alpha_i + \frac{n\varepsilon - nG + \frac{nH \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{2}}{k_i} - \frac{nH}{2k_i \operatorname{tg} \frac{v}{2}} = \left(\alpha_i - \frac{nH}{2k_i \operatorname{tg} \frac{v}{2}} \right) + \lambda$$

$$\frac{1}{\gamma_i} = \frac{1}{\alpha_i} - \frac{n'\varepsilon' - n'G' + \frac{n'H' \operatorname{tg} \frac{v'}{2}}{2}}{k_i} + \frac{n'H'}{2k_i \operatorname{tg} \frac{v'}{2}} = \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{n'H'}{2k_i \operatorname{tg} \frac{v'}{2}} \right) - \lambda'$$

les parenthèses étant des quantités finies, λ et λ' des quantités du deuxième ordre; si on multiplie membre à membre et si on néglige le produit $\lambda \lambda'$, on obtient :

$$(5) \quad \alpha_i \frac{\operatorname{tg} \frac{v}{2}}{nH} - \frac{1}{\alpha_i} \frac{\operatorname{tg} \frac{v'}{2}}{n'H'} - \frac{1}{2k_i} = -\frac{\lambda' \operatorname{tg} \frac{v'}{2}}{n'H'} - \frac{\lambda \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{nH} - \left(\frac{\lambda}{\alpha_i} - \lambda' \alpha_i \right) \frac{2k_i \operatorname{tg} \frac{v}{2} \operatorname{tg} \frac{v'}{2}}{nHn'H'}$$

Évaluons avec une approximation convenable $\frac{nH}{n'H'}$

$$\frac{nH}{n'H'} = \frac{nl \cos (\omega - u)}{n'l' \cos (\omega' - u')} = \frac{nh \cos u + ng \sin u}{n'h' \cos u' + n'g' \sin u'} = \frac{nh \cos u}{n'h' \cos u'} \frac{1 + \frac{ng}{nh} \operatorname{tg} u}{1 + \frac{n'g'}{n'h'} \operatorname{tg} u'}$$

or nous avons déjà employé l'expression $\frac{nh}{n'h'} = \alpha (1 - fnhn'h')$

dès lors $\frac{nH}{n'H'} = \alpha \frac{\cos u}{\cos u'} \left(1 + \frac{ng}{nh} \operatorname{tg} u - \frac{n'g'}{n'h'} \operatorname{tg} u' - fnhn'h' \right)$

et $\alpha_i = \frac{nH}{n'H'} \left(1 - \frac{ng}{nh} \operatorname{tg} u + \frac{n'g'}{n'h'} \operatorname{tg} u' + fnhn'h' \right)$

Substituons α_i dans (5) et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \frac{v}{2}}{n'H'} - \frac{\operatorname{tg} \frac{v'}{2}}{nH} - \frac{1}{2k_i} = & \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{v}{2}}{n'H'} + \frac{\operatorname{tg} \frac{v'}{2}}{nH} \right) \left(\frac{ng}{nh} \operatorname{tg} u - \frac{n'g'}{n'h'} \operatorname{tg} u' \right. \\ & \left. - fnhn'h' \right) - \frac{\lambda' \operatorname{tg} \frac{v'}{2}}{n'H'} - \frac{\lambda \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{nH} - \left(\frac{\lambda}{\alpha_i} - \lambda' \alpha_i \right) \frac{2k_i \operatorname{tg} \frac{v}{2} \operatorname{tg} \frac{v'}{2}}{nHn'H'} \end{aligned}$$

Si nous faisons disparaître les dénominateurs nH , $n'H'$, le premier membre contient des termes du 2^e ordre, le second des termes du 4^e ordre dans lesquels on pourra remplacer nH par nh et $n'H'$ par anh , k_i par k , α_i par α .

$$\begin{aligned} nH \operatorname{tg} \frac{v}{2} - n'H' \operatorname{tg} \frac{v'}{2} - \frac{nHn'H'}{2k_i} = & \left(nhv - \frac{n^2h^2}{2k\alpha} \right) \left(\frac{nhu}{2nR} - \frac{n'h'u'}{2n'R'} \right. \\ & \left. - f \frac{n^2h^2}{\alpha} \right) - \frac{\lambda' nhv'}{2} - \frac{\lambda n'h'v}{2} - \left(\frac{\lambda}{\alpha_i} - \lambda' \alpha_i \right) \frac{kvv'}{2} \end{aligned}$$

Cette équation donne entre v et v' la relation approximative

$$nhv - n'h'v' = \frac{n^2h^2}{\alpha k}$$

qui permet d'éliminer v' du deuxième membre; nR , $n'R'$ sont liés

par $\frac{1}{nR} - \frac{1}{n'R'} = V$

$$\begin{aligned} nH \operatorname{tg} \frac{v}{2} - n'H' \operatorname{tg} \frac{v'}{2} = & - \frac{n^2h^2}{2\alpha k} \left(\frac{nhuV}{2} - f \frac{n^2h^2}{\alpha} \right) + nhv \left(\frac{nhuV}{2} \right. \\ & \left. - f \frac{n^2h^2}{\alpha} \right) - \frac{\lambda' \alpha}{2} \left(nhv - \frac{n^2h^2}{k\alpha} \right) - \frac{\lambda nhv}{2\alpha} - \left(\frac{\lambda}{\alpha} - \lambda' \alpha \right) \frac{k}{2} v \left(xv - \frac{nh}{k} \right) \end{aligned}$$

pour simplifier cette expression, nous allons poser: $\lambda = \lambda' \gamma^2 + \Psi$;

on pourra constater que le coefficient de λ' s'annule et il reste :

$$-\frac{\Psi}{2} \left(\frac{nhv}{\alpha} + \frac{kp^2\gamma}{\alpha} \right) = -\frac{\Psi}{2} \left(\frac{k(\alpha - \gamma) v^2}{\alpha} + \frac{kp^2\gamma}{\alpha} \right) = -\frac{\Psi}{2} kv^2$$

dès lors,

$$\Delta - \hat{z} = -nG + n'G' + \frac{nHn'H'}{2k_i} - \frac{n^2h^2}{2k\alpha} \left(\frac{nhuV}{2} - f \frac{n^2h^2}{\alpha} \right) + nhv \left(\frac{nhuV}{2} - f \frac{n^2h^2}{\alpha} \right) - \frac{\Psi}{2} kv^2$$

le terme $k\Psi$ contient $n\varepsilon - \gamma^2 n' \varepsilon'$ qui s'écrit $\frac{3}{2} \Phi uv + \frac{P}{2} v^2$, Φ et P étant les fonctions de coma et d'aberration au point γ ; d'autre part, $\hat{z} = \frac{\Phi uv^3}{4} + \frac{Pv^4}{8}$; il y a donc une simplification et il ne reste plus à évaluer que le terme :

$$-\frac{v^2}{2} \left[-nG + \frac{nH \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{2} - \frac{\gamma^2 v^2}{2} \left(-n'G' + \frac{n'H' \operatorname{tg} \frac{v'}{2}}{2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{dans lequel } \gamma v = v' = \alpha v - \frac{nh}{k} \quad nG &= ng - nhu \\ &= \frac{n^2h^2}{2nR} - nhu \quad n'G' = \frac{n'^2h'^2}{2n'R'} - n'h'u = \frac{n^2h^2}{2\alpha^2 n'R'} - nhu \end{aligned}$$

d'où le reste de $-\frac{\Psi}{2} kv^2$ devient

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} \left(\frac{n^2h^2}{2nR} - nhu - nh \frac{v}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(\alpha v - \frac{nh}{k} \right)^2 \left[\frac{n^2h^2}{2\alpha^2 n'R'} - nhu - \frac{nh}{4\alpha} \left(\alpha v - \frac{nh}{k} \right) \right] \end{aligned}$$

dès lors,

$$\begin{aligned} \Delta + \frac{\Phi uv^3}{2} + \frac{Pv^4}{8} &= -nG + n'G' + \frac{nHn'H'}{2k_i} - \frac{n^2h^2}{2k\alpha} \left(\frac{nhuV}{2} - f \frac{n^2h^2}{\alpha} \right) \\ &\quad - \frac{n^4h^4}{4\alpha^2 k^2 n'R'} + \frac{n^3h^3u}{2k^2} - \frac{n^4h^4}{8k^2} + v \left(\frac{n^2h^2uV}{2} - f \frac{n^3h^3}{\alpha} - \alpha \frac{n^2h^2u}{k} \right) \\ &\quad + \frac{n^3h^3}{2k\alpha n'R'} + \frac{3}{8} \frac{n^3h^3}{k^2} \Big) + n^2 \left(\frac{nhu(\alpha^2 - 1)}{2} + \frac{n^2h^2V}{4} - \frac{3}{8} \alpha \frac{n^2h^2}{k} \right) \\ &\quad + v^3 \frac{nh(\alpha^2 - 1)}{8} . \end{aligned}$$

Si sur la droite AM on déplace le point M, les seules quantités qui varient sont v , Φ , P ; si on fait $v = 0$, le deuxième membre se réduit au terme indépendant de v et, au premier membre, Φuv^3 et Pv^4 prennent les valeurs particulières qui conviennent à $v = 0$ $\gamma_t = \infty$, c'est-à-dire $A_2 v_0'^4$ et $\left(A_2 \alpha + \frac{B_2 - k}{2}\right) uv_0'^3$, v_0' étant la valeur de v' pour $v = 0$; or l'abscisse de $M' = \frac{k_t}{n'} \left(\frac{1}{\gamma_t} - \frac{1}{\alpha_t}\right)$ donne

$$M'_0 = -\frac{k_t}{n' \alpha_0}, \quad -v'_0 \frac{k_t}{n' \alpha_t} = h' \quad v'_0 = -\frac{n' h'}{k_t \alpha_t} = -\frac{n' h'}{k \alpha} = -\frac{nh}{k}$$

$$\Delta - \frac{1}{2} \left(A_2 \alpha + \frac{B_2 - k}{2} \right) u \frac{n^3 h^3}{k^3} + \frac{1}{8} A_2 \frac{n^4 h^4}{k^4} = -nG + \dots \text{et par}$$

soustraction

$$\frac{1}{2} \left[\Phi uv^3 + \left(A_2 \alpha + \frac{B_2 - k}{2} \right) u \frac{n^3 h^3}{k^3} \right]$$

$$+ \frac{1}{8} \left(Pv^4 - A_2 \frac{n^4 h^4}{k^4} \right) = v \left[\frac{n^2 h^2 u V}{2} - f \frac{n^3 h^3}{\alpha} - \alpha \frac{n^2 h^2 u}{k} + \frac{n^3 h^3}{2 k \alpha n' R'} \right]$$

$$+ \frac{3}{8} \frac{n^3 h^3}{k^2} + v^2 \left[n h u (\alpha^2 - 1) + \frac{n^2 h^2 V}{4} - \frac{3}{8} \frac{\alpha n^2 h^2}{k} \right] + \frac{v^3}{8} n h (\alpha^2 - 1$$

Exprimons maintenant nh en fonction de v et de γ , $nh = -vk(\gamma - \alpha)$

$$\frac{1}{2} \left[\Phi uv^3 - \left(A_2 \alpha + \frac{B_2 - k}{2} \right) u (\gamma - \alpha)^3 v^3 \right] + \frac{1}{8} \left(Pv^4 - A_2 (\gamma - \alpha)^4 v^4 \right)$$

$$= \frac{uv^3}{2} \left[k^2 V (\gamma - \alpha)^2 - 2k\alpha (\gamma - \alpha)^2 - k (\gamma - \alpha) (\alpha^2 - 1) \right]$$

$$+ v^4 \left[(\gamma - \alpha)^3 \left(\frac{k^3}{\alpha} - \frac{k^2}{2 \alpha n'} - \frac{3}{8} k \right) + (\gamma - \alpha)^2 \left(\frac{k^2 V}{4} - \frac{3 k \alpha}{8} \right) \right.$$

$$\left. - k (\gamma - \alpha) \frac{\alpha^2 - 1}{8} \right]$$

et cette identité nous donne immédiatement la fonction de Fermat Φ_α au point α

$$\Phi_\alpha = (\gamma - \alpha) \left[\left(A_2 \alpha + \frac{B_2 - k}{2} \right) (\gamma - \alpha)^2 + k (\alpha^2 - 2\alpha\gamma + 1) + k^2 V (\gamma - \alpha) \right]$$

identique à l'expression obtenue en faisant $\gamma_0 = \alpha$ dans l'expression générale de Φ (19).

En poursuivant l'identification, nous aurons l'expression générale

de P, dans laquelle, pour nous conformer à la notation antérieure, nous remplacerons γ par γ_0

$$P = (\gamma_0 - \alpha) \left[\Lambda_2 (\gamma_0 - \alpha)^3 + k \left(\frac{8fk^2}{\alpha} - \frac{4k}{\alpha n' R'} - 3 \right) (\gamma_0 - \alpha)^2 + 2k^2 V (\gamma_0 - \alpha) + k (1 + 2\alpha^2 - 3\alpha\gamma_0) \right]$$

Si on identifie avec l'expression générale mise sous la forme

$$P = \Lambda_2 (\gamma_0 - \alpha)^3 + (4\Lambda_2 \alpha + 2B_2 - k) (\gamma_0 - \alpha)^2 + 2k^2 V (\gamma_0 - \alpha) + k (1 - 2\alpha^2 - 3\alpha\gamma_0),$$

on obtient
$$\Lambda_2 \alpha + \frac{2B_2 - k}{4} = \frac{k^2}{\alpha} \left(2fk - \frac{1}{n' R'} \right) - \frac{3k}{4}$$

ou
$$\Lambda_2 \alpha + \frac{B_2 - k}{2} = \frac{k^2}{\alpha} \left(2fk - \frac{1}{n' R'} \right) - k$$

Reprenons l'expression de Δ obtenue en faisant $v = 0$ et développons G, G' H, H' en ne conservant que les termes d'un ordre égal ou inférieur au 4^e, en posant

$$\begin{aligned} k_i &= k (1 - zu^2) \\ \Delta &= \frac{1}{2} \left(\Lambda_2 \alpha + \frac{B_2 - k}{2} \right) u \frac{n^3 h^3}{k^3} + \frac{1}{8} \Lambda_2 \frac{n^4 h^4}{k^4} = -ng \left(1 - \frac{u^2}{2} \right) \\ &+ n' g' \left(1 - \frac{u'^2}{2} \right) + \frac{nHn'H'}{2k} (1 - zu^2) + nhu - n'h'u' \\ &- \frac{n^2 h^2}{2k\alpha} \left(\frac{nhuV}{2} - f \frac{n^2 h^2}{\alpha} \right) + \frac{n^3 h^3 u}{2k^2} - \frac{n^4 h^4}{4\alpha^2 k^2 n' R'} - \frac{n^4 h^4}{8\alpha k^3} \end{aligned}$$

Or, Δ est assurément indépendant de u , et les coefficients de u^2 et de u doivent s'annuler dans l'expression de Δ , le coefficient de u^2 nous donne, puisque

$$nH \times n'H' = nhn'h' \left[1 + \frac{nhuV}{2} - \frac{u^2}{2} (1 + \alpha^2) \right].$$

$2\alpha = -(1 + \alpha^2 - \alpha kV)$ qui redonne k_i ; l'annulation du coefficient de u nous fournit en posant :

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{nR} + \frac{1}{n'R'} : - \frac{1}{2} \left(\Lambda_2 \alpha + \frac{B_2 - k}{2} \right) = - \frac{k^2}{4\alpha} V + \frac{k^2 V'}{4\alpha} + \frac{k}{2} - \frac{k^3 f}{\alpha} \\ \Lambda_2 \alpha + \frac{B_2 - k}{2} &= \frac{k^2}{\alpha} \left(2fk - \frac{1}{n' R'} \right) - k, \end{aligned}$$

expression déjà trouvée, et il reste pour Δ

$$\Delta = -ng + n'g' + \frac{nhn'h'}{2k} + \frac{n^4h^4}{4k^4\alpha} \left(2fk - \frac{1}{n'R'} \right) \frac{k^2}{\alpha} - \frac{k}{2} - \frac{\Lambda_2\alpha}{2}$$

$$\Delta = -ng + n'g' + \frac{nhn'h'}{2k} + \frac{n^4h^4}{8\alpha k^4} (\Lambda_2\alpha + B_2)$$

Nous avons vu que le 2^e point de Petzval est confondu avec un point de Fermat (la surface de Petzval étant alors stabilisée) si :

$$(6) \quad \Lambda_2\alpha + \frac{B_2 - k}{2} = k \frac{\alpha(\alpha - kV)}{1 - \alpha^2}$$

Or, le point A étant aplanétique (au moins sur un élément de surface) les trois équations sans second membre (2^e partie) $M_2 = 0$, $M_1 = 0$, $M_0 = 0$ sont satisfaites pour trois valeurs α^2 , α , 1, différentes de 0; donc le déterminant de leurs coefficients est égal à 0; or, cette condition est celle de la stabilisation simultanée des deux surfaces de Petzval, obtenues par diaphragmation en un point γ_0 ; γ_0 est racine de l'équation qui exprime que $Q = 0$ et $\frac{dQ}{d\gamma_0}$ ont une racine commune; si on cherche cette condition on obtient une équation du 2^e degré en γ_0 qui n'admet α pour racine que si $\Lambda_2\alpha + \frac{B_2 - k}{2} = k \frac{\alpha(\alpha - kV)}{1 - \alpha^2}$; il en résulte que si la méthode que nous venons d'appliquer n'introduit aucune relation nouvelle, elle contrôle les résultats obtenus autrement et, en particulier, elle prouve que la surface de Petzval obtenue par diaphragmation au point A n'est pas nécessairement stabilisée.

Il est pourtant remarquable que si la condition (6) est réalisée on obtient

$$(7) \quad 2fk n' = \frac{1}{R'} - \frac{n'\alpha(kV - \alpha)}{k(\alpha^2 - 1)}$$

Or, le dernier terme est précisément l'inverse de la valeur du rayon de courbure, obtenue en supposant que les surfaces aplanétiques ont comme centres de courbure, des points conjugués de Gauss; il en résulte que si cette dernière condition est remplie, on a constamment $\frac{nh}{n'h'} = \alpha$, ($f = 0$); le rapport de convergence sagittal en tous les points de la surface aplanétique, est égal au rapport de conver-

gence α au sommet de la surface. Cette propriété est à rapprocher de celle que nous avons énoncée pour tous les points de la surface de Petzval déterminée par diaphragmation au point A.

On peut rapprocher encore des remarques précédentes celle-ci : si au moyen de l'équation des focales sagittales et de la condition des sinus on écrit

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{n\rho} = \frac{1}{k} - \frac{\alpha}{nR} + \frac{1}{\alpha n'R'} + \frac{\alpha \cos u}{nR} - \frac{1}{\alpha} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 u}}{n'R'}$$

cette expression représente l'équation en coordonnées polaires, avec origine au point A, de la méridienne de la surface de Petzval obtenue par diaphragmation au point aplanétique; or, cette équation, qui est en général du 4^e degré, tombe au 2^e si $\frac{1}{k} = \frac{\alpha}{nR} - \frac{1}{\alpha n'R'}$, c'est-à-dire si les centres de courbure des surfaces aplanétiques sont des conjugués de Gauss; il en résulte que si cette dernière condition est réalisée, les méridiennes des surfaces de Petzval conjuguées sont deux coniques. On ne pourra aller plus loin dans la détermination du système qui contient un point aplanétique, que si l'on est amené à donner à Δ une valeur tirée d'autres considérations.

Points b et B.

Nous avons vu (2^e partie) que l'existence simultanée de deux points A, $\left(\alpha \text{ et } \frac{1}{\alpha}\right)$, entraînait celle de deux autres points stigmatiques réels ou imaginaires, jouissant de la propriété remarquable suivante : si on imagine un point mobile se déplaçant sur une direction passant par le point stigmatique objet, sur la direction conjuguée les deux focales du point sont constamment confondues; nous allons retrouver directement ces points remarquables désignés par B.

Tout d'abord si, dans la condition générale du stigmatisme :

$$\frac{du \sin (\Omega - u)}{\sin \Omega \sin u} = \frac{du' \sin (\Omega' - u')}{\sin \Omega' \sin u'},$$

on suppose que le point de Petzval, P, voisin du point stigmatique B se trouve sur la direction BX elle-même; on a $\Omega = u$, $\Omega' = u'$, la relation devient illusoire; pour lever l'indétermination nous sup-

poserons que l'angle Ω détermine dans le plan de la section principale une direction infiniment voisine de BX; on aura $\Omega = u + du$, $\Omega' = u' + du'$ et la formule devient $du^2 : \sin^2 u = du'^2 : \sin^2 u'$ ou $du : \sin u = du' : \sin u'$ puisque $\frac{du'}{du}$, $\frac{\sin u'}{\sin u}$, ont même limite pour $u = 0$.

Cette relation entraîne $\operatorname{tg} \frac{u'}{2} = \beta \operatorname{tg} \frac{u}{2}$, β étant le rapport de convergence au point stigmatique.

Pour mieux préciser la nature de ces points, écrivons les formules des focales sagittales et des focales tangentielles, sur deux directions conjuguées passant par ces points stigmatiques :

$$\frac{\sin u'}{ns \sin u} - \frac{\sin u}{n's' \sin u'} = \frac{1}{k_s} \quad \frac{du'}{n'l du} - \frac{du}{n'l' du'} = \frac{1}{k_t}$$

les points de Petzval seront obtenus en posant $s = t$, $s' = t'$; l'élimination de s' conduit à :

$$n^2 s^2 \left(\frac{du}{du'} \cdot \frac{1}{k_s} - \frac{\sin u}{\sin u'} \frac{1}{k_t} \right) - ns \left(\frac{du}{du'} \frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{du'}{du} \frac{\sin u}{\sin u'} \right) = 0$$

la solution $ns = 0$ convient à l'origine, où les deux focales sont confondues; la deuxième solution sera nulle et donnera un point double à l'origine si :

$$\frac{du}{du'} \frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{du'}{du} \frac{\sin u}{\sin u'} \text{ ou } du : \sin u = du' : \sin u'.$$

Cette condition ou la condition équivalente $\operatorname{tg} \frac{u'}{2} = \beta \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ définit des points stigmatiques tels que, *sur des directions conjuguées quelconques passant par ces points, les deux points de Petzval soient confondus avec le point stigmatique.*

De tels points, que nous proposons d'appeler *b* présentent un intérêt médiocre; il n'en est pas de même pour les points qui sont soumis en outre à une autre condition.

Si en effet on a $\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_t}$ le coefficient de $n^2 s^2$ est nul à son tour et la valeur de ns est indéterminée, c'est-à-dire que sur les directions conjuguées considérées, les focales tangentielles et les focales sagittales, étant liées, à partir de la même origine, par des relations identiques, sont confondues en tous les points des deux directions con-

juguées; c'est le cas du miroir ellipsoïdal de révolution autour du grand axe, pour des directions conjuguées passant par les foyers de l'ellipsoïde. L'ensemble des deux conditions $\operatorname{tg} \frac{u'}{2} = \beta \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ et $\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_t}$ définit donc les deux points stigmatiques B, tels que sur deux directions conjuguées passant par un de ces points et par son conjugué, les focales sagittales et les focales tangentielles soient constamment confondues. A tous les points objets correspondront, par une diaphragmation convenable du pinceau en B, des points images.

En exprimant ces conditions en deuxième approximation on obtiendrait les résultats déjà acquis; la condition $\frac{du'}{du} = \frac{\sin u'}{\sin u}$ exige $\mathcal{A}_0 = 0$ et le point stigmatique b est caractérisé en deuxième approximation par $A\beta^2 + B\beta + C = 0 \quad A\beta^2 - C = 0$.

Si on introduit en plus la condition $\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_t}$, cette dernière exige que le coefficient B soit nul et on a alors les trois conditions

$$\begin{aligned} (22, 2^e \text{ partie}) \quad A &= A_2\beta^2 + (B_2 - k)\beta + \frac{B_1 - 2k^2V}{4} = 0 \\ B &= B_2\beta^2 + B_1\beta + B_0 = 0 \quad C = \frac{B_1 - 2k^2V}{4} \beta^2 + (B_0 - k)\beta + C_0 = 0 \end{aligned}$$

qui exprime, comme nous l'avons vu, que la fonction d'astigmatisme est identiquement nulle pour $\gamma_0 = \beta$. — On peut, comme nous l'avons fait pour le point A, calculer les fonctions Q, Φ , P, D. Le calcul donnera pour la fonction Q :

$$Q = (\gamma_0 - \beta) \left\{ (\gamma - \beta) [A_2(\gamma_0 - \beta)(\gamma - \beta) + (2A_2\beta + B_2 - k)(\gamma_0 + \gamma - 2\beta) + k(\gamma_0 - \beta) + 2k\beta + 2k^2V] + k(\beta\gamma_0 - 1) \right\}$$

la fonction Q est nulle pour $\gamma_0 = \beta$, l'un des points de Petzval est en B, mais tous les autres points des droites conjuguées sont aussi des points de Petzval; si $\gamma_0 = \frac{1}{\beta}$, la diaphragmation au point inverse produit une surface de Petzval au point B puisque $(\gamma - \beta) = 0$, mais nous verrons qu'en général cette surface de Petzval n'est pas stabilisée.

On peut déterminer assez facilement la fonction Φ_β en remar-

quant que les points de Fermat sont donnés, en général, par la condition que les deux équations

$$A\gamma^2 + B\gamma + C = 0, \text{ et } \frac{dA}{d\gamma_0} \gamma^2 + \frac{dB}{d\gamma_0} \gamma + \frac{dC}{d\gamma_0} = 0,$$

ont deux racines communes; or, ici la première équation est identique, les racines communes sont assurément les racines de la deuxième équation, qui peut s'écrire :

$$\left(\Lambda_2 \beta + \frac{B_2 + k}{2} \right) \gamma^2 + \left(B_2 \beta + \frac{B_1}{2} \right) \gamma + \left(C_2 \beta + \frac{C_1}{2} \right) = 0$$

qui devient :

$$\left(\Lambda_2 \beta + \frac{B_2 + k}{2} \right) (\gamma - \beta)^2 + \left(\frac{k\beta}{2} + k^2 V \right) (\gamma - \beta) + \frac{k}{2} (\beta^2 - 1) = 0$$

et, par suite,

$$\Phi_\beta = (\gamma - \beta) \left[\left(\Lambda_2 \beta + \frac{B_2 + k}{2} \right) (\gamma - \beta)^2 + \left(\frac{k\beta}{2} + k^2 V \right) (\gamma - \beta) + \frac{k}{2} (\beta^2 - 1) \right]$$

Le calcul de la valeur générale donne d'ailleurs (2^e partie (25)) :

$$\begin{aligned} \Phi = & (\gamma_0 - \beta) \left[(\gamma - \beta)^2 \left(\Lambda_2 (\gamma + 2\beta) + \frac{3B_2}{2} - \frac{k}{2} \right) \right. \\ & + (\gamma - \beta) \left(2k\beta + k^2 V \right) + \frac{k}{2} (\beta^2 - 1) \left. \right] + (\gamma - \beta) \left[\left(\Lambda_2 \beta \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{B_2 - k}{2} \right) (\gamma - \beta)^2 + \left(\frac{k}{2} \beta + k^2 V \right) (\gamma - \beta) + \frac{k}{2} (\beta^2 - 1) \right] \end{aligned}$$

Enfin, on obtient la fonction d'aberration en faisant $\gamma = \gamma_0$, soit dans la fonction d'astigmatisme, soit dans la fonction de coma et on trouve

$$P = (\gamma_0 - \beta) \left\{ (\gamma_0 - \beta)^2 [\Lambda_2 (\gamma_0 + 3\beta) + 2B_1 - k] + 2 (\gamma_0 - \beta) (k\beta + k^2 V) + k (\beta \gamma_0 - 1) \right\}$$

Si on fait $\gamma = \beta$ dans la fonction de coma, on obtient :

$$\Phi = \frac{k}{2} (\gamma_0 - \beta) (\beta^2 - 1)$$

qui ne s'annule pas pour $\gamma_0 = \frac{1}{\beta}$, et ceci montre bien que la surface

de Petzval, qui, dans ce dernier cas, passe par le point B, n'est pas stabilisée.

La fonction de distorsion D aura évidemment $(\gamma_0 - \beta)$ en facteur et tous les points de Petzval, en nombre infini, seront des points sans distorsion (on suppose toujours $\alpha = 0$, c'est-à-dire l'astigmatisme nul dans le premier milieu); l'expression générale est alors)

$$D = (\gamma_0 - \beta) \{ [B_2(\gamma_0 - \beta) - 4A_2\beta^2 - (2B_2 - 4k)\beta + 2k^2V](\gamma - \beta) - [(2A_2\beta^2 + (B_2 - 2k)\beta)(\gamma_0 - \beta) - 2k^2V\beta + 2k] \}$$

Critères expérimentaux permettant de reconnaître les points remarquables précédemment étudiés.

Le moyen employé par Abbe pour vérifier si un point stigmatique obéit à la loi des sinus, consiste, comme on sait, à former une pseudo-image d'un réseau hyperbolique convenable, au moyen d'une diaphragmation très étroite pratiquée au point stigmatique; si la condition des sinus a lieu au point considéré, la pseudo-image est un quadrillage régulier.

Cette méthode ne permet pas de distinguer les points a , qui n'obéissent qu'à la loi des sinus, des points A qui supposent l'existence d'éléments aplanétiques de courbures déterminées.

Nous caractériserons les trois dispositifs: Herschel; A, a ; B, b ; par une comparaison des rapports de convergence (et plus pratiquement des grandissements), dans les deux plans rectangulaires qui contiennent les focales; formons le tableau

	γ	γ_*	$\gamma_t = \frac{du'}{du}$	$\gamma_* : \gamma_t$
Herschel	$\frac{\sin \frac{u'}{2}}{\sin \frac{u}{2}}$	$\frac{\sin u'}{\sin u}$	$\frac{\operatorname{tg} \frac{u'}{2}}{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}$	$\frac{\cos^2 \frac{u'}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2}}$
$a, A,$	$\frac{\sin u'}{\sin u}$	$\frac{\sin u'}{\sin u}$	$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}$	$\frac{\cos u'}{\cos u}$
$b, B,$	$\frac{\operatorname{tg} \frac{u'}{2}}{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}$	$\frac{\sin u'}{\sin u}$	$\frac{\sin u'}{\sin u}$	1

Si les rayons conjugués ont des inclinaisons assez fortes, les rap-

ports $\cos^2 \frac{u'}{2} : \cos^2 \frac{u}{2}$, $\cos u' : \cos u$ et 1, auront des valeurs nettement différentes; donc, en comparant les rapports de convergence tangentiels et sagittaux sur les directions conjuguées u , u' , au point stigmatique lui-même, on découvrira la nature de ce point.

La source lumineuse devra toujours comporter deux séries de points équidistants formant une croix dont l'une des branches sera située dans la section principale d'incidence, le plan de la croix étant bien perpendiculaire à la direction moyenne du pinceau diaphragmé; placée au point stigmatique, la croix donnera une image et selon qu'elle sera réelle ou virtuelle, elle pourra être recueillie directement sur un réticule micrométrique ou reçue par un viseur dont l'axe sera orienté suivant l'axe du pinceau émergent; la netteté de l'image permettra de vérifier le stigmatisme; le rapport $\gamma_s : \gamma_t$ sera évidemment, puisque $n = n'$, $\frac{I_s}{I'_s} : \frac{I_t}{I'_t} = \frac{I'_t}{I'_s}$ si on a pris $I_e = I_t$; le rapport cherché sera donc celui de la longueur d'une division de l'image dans le plan perpendiculaire à la section principale, à la longueur d'une division de l'image dans le plan d'incidence. On déterminera, au moyen du dispositif déjà indiqué, les angles u , u' , ce qui permettra de comparer le rapport trouvé $\frac{I'_t}{I'_s}$, les rapports $\cos^2 \frac{u'}{2} : \cos^2 \frac{u}{2}$ ou $\cos u' : \cos u$; d'ailleurs, si le point stigmatique est b ou B , quels que soient les angles u , u' , on aura toujours $I'_t = I'_s$.

Il est inutile d'insister sur les points d'Herschel dont nous avons montré l'inexistence, on se bornera au critère de la condition d'Herschel; mais il reste à distinguer les points a et A , b et B .

Si, ayant diaphragmé assez étroitement au point stigmatique un pinceau nettement incliné sur l'axe, et dont l'origine est un point sagittal inverse, on obtient une image nette, sans astigmatisme, du point objet, le point stigmatique sera un point A ; sinon on aura affaire seulement à un point a .

De même si la diaphragmation au point b ou B , sur une direction inclinée, d'un pinceau émané d'un point quelconque de cette direction, donne une image ponctuelle sans astigmatisme, on aura bien un point B ; si on est en présence d'un point b , on n'obtiendra pas d'image ponctuelle, quelle que soit la position du point objet sur la direction du pinceau diaphragmé.

CHAPITRE XIII

Etude des surfaces de Petzval formant des couples, à la fois stabilisés ou couples quasi-aplanétiques.

Dans tout système centré, il existe quatre points (réels ou imaginaires) tels que la diaphragmation en ces points, donne naissance à quatre couples correspondants de surfaces de Petzval, dont une est stabilisée, c'est-à-dire confondue avec une surface de Fermat, et par suite quasi-aplanétique; pour que les deux surfaces d'un couple soient à la fois stabilisées, il faut que le déterminant Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_2 & A_1 & A_0 \\ B_2 & B_1 & B_0 \\ C_2 & C_1 & C_0 \end{vmatrix}$$

des 9 coefficients de la fonction d'astigmatisme soit égal à 0.

Si cette condition est satisfaite, il n'existe plus que deux positions du diaphragme pour lesquelles la stabilisation a lieu, mais en ces deux points la stabilisation est simultanée pour les deux surfaces de Petzval, qui sont ainsi, à la fois, quasi-aplanétiques.

Soit D (*fig. 20*), le centre de l'ouverture du diaphragme placé à l'un de ces deux derniers points, DX une droite quelconque passant par ce point et perçant les deux surfaces objet quasi-aplanétiques aux points σ, Σ ; D'X' la droite conjuguée rencontrant les surfaces images en $\sigma'\Sigma'$; si on pose $D\sigma = s$, $D\Sigma = S$, $D'\sigma' = s'$, $D'\Sigma' = S'$, ces points étant des focales sagittales, on a évidemment, en désignant par u, u' les inclinaisons des droites conjuguées,

$$(6) \text{ (1re partie) } \frac{1}{n \sin^2 u} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S} \right) = \frac{1}{n' \sin^2 u'} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{S'} \right)$$

$$\text{si} \quad s \sin u = h \quad S \sin u = H \quad s' \sin u' = h' \quad S' \sin u' = H'$$

sont les distances des quatre points à l'axe

$$(7) \quad \frac{\sigma \Sigma}{nhH} = \frac{\sigma' \Sigma'}{n'h'H'}$$

Or, les points $\sigma, \sigma', \Sigma, \Sigma'$ étant quasi stigmatiques, on peut déplacer le point D d'une quantité infiniment petite du 1^{er} ordre sans modifier la position des surfaces; par le point σ , faisons passer un rayon faisant dans la section principale un angle du avec DX, son conjugué fera dans la même section un angle du' avec D'X' et passera par le point σ' ; le point (σ, σ') sera quasi-stigmatique sur la nouvelle direction; le second point quasi-stigmatique sera à l'intersection de cette droite avec la surface quasi-aplanétique qui contient Σ ; on pourrait pour ces points écrire l'équation (6') en $u + du, u' + du'$, on peut donc différencier l'équation en y regardant h, h' comme des constantes.

$$\frac{dH}{H} - \frac{d\overline{\sigma\Sigma}}{\overline{\sigma\Sigma}} = \frac{dH'}{H'} - \frac{d\overline{\sigma'\Sigma'}}{\overline{\sigma'\Sigma'}}$$

$$\text{mais } H = S \sin u = h + \overline{\sigma\Sigma} \sin u$$

$$\frac{dH}{H} = \frac{d\overline{\sigma\Sigma} \sin u + \sigma \Sigma \cos u du}{S \sin u} = \left(\frac{d\overline{\sigma\Sigma}}{\overline{\sigma\Sigma}} + \frac{du}{\operatorname{tg} u} \right) \frac{\overline{\sigma\Sigma}}{S}$$

d'autre part, si on désigne par B l'angle de DX avec la demi-normale, dirigée vers l'axe, à la surface au point Σ , on a :

$$\operatorname{tg} B = - \frac{d\overline{\sigma\Sigma}}{\overline{\sigma\Sigma} du}$$

$$\frac{dH}{H} - \frac{d\overline{\sigma\Sigma}}{\overline{\sigma\Sigma}} = \frac{du}{\sin u} \left[\cos u \left(1 - \frac{s}{S} \right) + \sin u \operatorname{tg} B \frac{s}{S} \right];$$

on aura une valeur tout à fait analogue, accentuée, pour le deuxième membre,

$$(d) \quad \frac{du}{\sin u} \left[\cos u \left(1 - \frac{s}{S} \right) + \sin u \operatorname{tg} B \frac{s}{S} \right] = \frac{du'}{\sin u'} \left[\cos u' \left(1 - \frac{s'}{S'} \right) + \sin u' \operatorname{tg} B' \frac{s'}{S'} \right]$$

les points σ, σ' étant aussi des focales tangentielles, on pourra, prenant ces points comme origine, écrire :

$$\frac{1}{ndu^2} \left(\frac{1}{\sigma\Sigma} - \frac{1}{\sigma T} \right) = \frac{1}{n'du'^2} \left(\frac{1}{\sigma'\Sigma'} - \frac{1}{\sigma' T'} \right)$$

T, T' étant deux focales tangentielles conjuguées, voisines de l'axe et telles que $DT = \eta$, $DT' = \eta'$, mesurent l'astigmatisme au voisinage de l'axe sur la direction DX; $T\sigma = s - \eta$, $T'\sigma' = s' - \eta'$ et

$$\frac{1}{nd\bar{u}^2} \frac{S - \eta}{(S - s)(s - \eta)} = \frac{1}{n'd\bar{u}'^2} \frac{S' - \eta'}{(S' - s')(s' - \eta')}$$

ou, en combinant avec l'équation (d),

$$\frac{\sin^2 u}{d\bar{u}^2} \frac{sS(S - \eta)}{(S - s)^2(s - \eta)} = \frac{\sin^2 u'}{d\bar{u}'^2} \frac{s'S'(S' - \eta')}{(S' - s')^2(s' - \eta')}$$

éliminant $\frac{du}{\sin u}, \frac{du'}{\sin u'}$

$$\left(\frac{1 - \frac{\eta}{S}}{1 - \frac{\eta}{s}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos u + \sin u \operatorname{tg} B \frac{s}{S - s} \right) = \left(\frac{1 - \frac{\eta'}{S'}}{1 - \frac{\eta'}{s'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos u' + \sin u' \operatorname{tg} B' \frac{s'}{S' - s'} \right),$$

Or, on peut évidemment obtenir une formule tout à fait analogue en faisant tourner le rayon DX autour du point Σ , et en introduisant les angles b et b' que font DX, D'X' avec les demi-normales aux surfaces quasi-aplanétiques en σ, σ' ; on obtiendra donc :

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 - \frac{\eta}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\eta'}{S'} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{\eta}{S} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\eta'}{s'} \right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\cos u' + \sin u' \operatorname{tg} b' \frac{S'}{S' - s'}}{\cos u + \sin u \operatorname{tg} b \frac{S}{S - s}} \\ = \frac{\cos u + \sin u \operatorname{tg} B \frac{s}{S - s}}{\cos u' + \sin u' \operatorname{tg} B' \frac{s'}{S' - s'}} \end{aligned}$$

formules qui permettent de calculer η' si on connaît η , plus particulièrement si on fait $\eta = 0$; de plus, le deuxième et le troisième

membre fournissent une relation entre les constantes relatives à des inclinaisons déterminées; cette relation se simplifie notablement si on passe en deuxième approximation.

Si x, X, x', X' sont les valeurs limites de s, S, s', S' pour $u = 0$

$$\frac{B}{u} = \frac{X + \rho_1}{-\rho_1} \quad \frac{B'}{u'} = \frac{X' + \rho'_1}{-\rho'_1} \quad b = \frac{x + \rho}{\rho} \quad \frac{b'}{u'} = \frac{x' + \rho'}{\rho'}$$

où $\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1$ représentent les rayons de courbure au sommet des surfaces quasi-aplanétiques.

Posons comme d'habitude $\eta = 2au^2$, $\eta' = 2a'u'^2$, on obtiendra en remarquant que $\frac{X-x}{nXx} = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{X'-x'}{nX'x'}$, γ_0 étant le rapport de convergence au point de Gauss qui est la limite de D

$$-\frac{X-x}{nXx} \left(2na - 2n'a'\gamma_0^4 \right) = \gamma_0^2 \frac{X'+x'}{X'-x'} - \frac{X+x}{X-x} \\ + \frac{2nXx}{X-x} \left(\frac{1}{n'\rho'} - \frac{1}{n\rho} \right) = \gamma_0^2 \frac{X'+x'}{X'-x'} - \frac{X+x}{X-x} + \frac{2nXx}{X-x} \left(\frac{1}{n'\rho'_1} - \frac{1}{n\rho_1} \right)$$

la comparaison des deux derniers membres nous donne, dans ce cas particulier, la condition de Petzval

$$\frac{1}{n\rho} - \frac{1}{n'\rho'} = \frac{1}{n\rho_1} - \frac{1}{n'\rho'_1} = V;$$

si nous introduisons la constante connue V, nous n'avons plus qu'une seule équation

$$2na - 2n'a'\gamma_0^4 = P = -\frac{nXx}{X-x} \left[\gamma_0^2 \frac{X'+x'}{X'-x'} - \frac{X+x}{X-x} - 2V \frac{nXx}{X-x} \right];$$

en désignant par γ_1 et γ_2 les rapports de convergence aux points où les surfaces quasi-aplanétiques rencontrent l'axe

$$(8) \quad P = 2na - 2n'a'\gamma_0^4 = -\frac{k(\gamma_0 - \gamma_1)(\gamma_0 - \gamma_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2} \left[(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_0^2 + 1) \right. \\ \left. - 2\gamma_0(1 + \gamma_1\gamma_2) - 2kV(\gamma_0 - \gamma_1)(\gamma_0 - \gamma_2) \right]$$

Cette formule permet le calcul de P; mais on peut l'utiliser un peu autrement en remarquant que la fonction d'astigmatisme s'écrit

$$Q = A(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2) \\ \text{dès lors,} \quad P = A(\gamma_0 - \gamma_1)(\gamma_0 - \gamma_2)$$

et l'équation devient

$$\Lambda = - \frac{k}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2} \left[(\gamma_1 + \gamma_2) (\gamma_0^2 + 1) - 2 \gamma_0 (1 + \gamma_1 \gamma_2) - 2 k V (\gamma_0 - \gamma_2) (\gamma_0 - \gamma_1) \right]$$

Ce résultat étant évidemment applicable aux surfaces aplanétiques dans lesquelles γ_1 et γ_2 sont indépendants de γ_0 , on aura une vérification immédiate pour le dioptré en posant

$$\gamma_1 = \frac{n}{n'} \quad \gamma_2 = \frac{n'}{n} \quad kV = -1$$

on obtient
$$A = -k \frac{nn'}{(n' - n)^2} (\gamma_0 - 1)^2$$

En général on devra regarder γ_1 et γ_2 comme des fonctions de la valeur γ_0 donnée par l'équation de stabilisation, puisque ces rapports sont racines de l'équation

$$A\gamma^2 + B\gamma + C = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 = -\frac{B}{A} \quad \gamma_1 \gamma_2 = \frac{C}{A}$$

si on substitue ces valeurs, on n'a plus qu'une équation en γ_0 ; celle-ci ne doit être satisfaite que pour les deux valeurs de γ_0 fournies par

l'une des équations
$$\frac{dA}{d\gamma_0} - \frac{dB}{B} = \frac{dC}{C}$$

Or, cette équation (8) devient

$$(9) \quad B^2 - 4AC - k \left[B (\gamma_0^2 + 1) + 2 \gamma_0 (A + C) + 2kV (A\gamma_0^2 + B\gamma_0 + C) \right] = 0$$

du 4^e degré en γ_0 ; elle contient donc nécessairement deux racines étrangères qu'on n'aperçoit pas immédiatement.

On peut cependant écrire que cette forme du 4^e degré est le produit de deux formes du second degré dont l'une est précisément $B \frac{dA}{d\gamma_0} - A \frac{dB}{d\gamma_0}$, tandis que l'autre est inconnue; en tenant compte

de la relation
$$\Delta = \begin{vmatrix} A_2 & A_1 & A_0 \\ B_2 & B_1 & B_0 \\ C_2 & C_1 & C_0 \end{vmatrix} = 0$$

on obtiendrait, après une identification assez pénible, les relations que nous avons établies entre les neuf coefficients.

Sans insister sur cette méthode, qui ne présente pas beaucoup d'avantages sur celle que nous avons déjà employée, l'introduction de ces relations nous permettra assez facilement d'écrire que l'équation (9) multipliée par un coefficient convenable $[B_2 (B_2 - k) - A_2 B_1]$ est le produit des deux trinômes

$$\left\{ \gamma_0^2 \left[B_2 (B_2 - k) - A_2 B_1 \right] - 2\gamma_0 \left(A_2 B_0 - B_2 \frac{B_1 - 2k^2 V}{4} \right) + B_1 \frac{B_1 - 2k^2 V}{4} - B_0 (B_2 - k) \right\} \times \left\{ \gamma_0^2 \left[B_2 (B_2 - k) - A_2 B_1 \right] - 2\gamma_0 \left[A_2 (B_0 - k) - (B_2 - k) \frac{B_1 - 2k^2 V}{4} \right] + B_1 \frac{B_1 - 2k^2 V}{4} - B_2 (B_0 - k) \right\}$$

Systèmes connexes

Le premier facteur est précisément l'équation qui donne les deux valeurs de γ_0 qui assurent la stabilisation simultanée des deux surfaces de Petzval; le second se déduit du premier en permutant B_2 et $B_2 - k$ et en même temps B_0 et $B_0 - k$; mais les nouvelles constantes ne peuvent appartenir aux fonctions d'un système centré que si elles conservent les relations qui ont été établies; cela exige que cette permutation soit accompagnée d'un changement de signe de toutes les constantes, si on regarde k comme constant, soit d'un changement de signe de k , si les constantes conservent un signe immuable.

Cette double modification crée un système absolument différent du système étudié, que nous appellerons système connexe; les deux systèmes présentent d'ailleurs d'assez curieuses relations, qui résultent de la simple remarque que les coefficients des expressions de $M_1^2 - 4 M_2 M_0$ de l'un sont les mêmes que ceux de l'expression $B^2 - 4 AC$ de l'autre et réciproquement.

On verrait aisément que pour les surfaces de Petzval :

1° Les surfaces stabilisées du premier système et les positions du

diaphragme qui créent les surfaces indéterminées du second, correspondent aux mêmes valeurs du rapport de convergence;

2^o Les surfaces indéterminées du premier système et les positions du diaphragme qui déterminent les surfaces stabilisées du second correspondent de même à des valeurs égales du rapport de convergence.

On a deux autres propositions en échangeant le premier et le second système.

Couples de surfaces aplanétiques. Points A et Points B.

La condition $\Delta = 0$ étant satisfaite, et la stabilisation des surfaces de Petzval étant obtenue pour une valeur γ_0 du rapport de convergence, cette valeur détermine dans l'équation

$$A\gamma^2 + B\gamma + C = 0$$

les deux valeurs de γ qui correspondent aux surfaces de Petzval à la fois stabilisées; sur la direction DX les points quasi aplanétiques $\sigma\Sigma$ sont à l'intersection avec ces deux surfaces; ces deux valeurs de γ sont aussi racines de l'équation :

$$\frac{dA}{d\gamma_0} \gamma^2 + \frac{dB}{d\gamma_0} \gamma + \frac{dC}{d\gamma_0} = 0$$

C'est la condition même de stabilisation.

Imaginons que, dans la même section principale, nous prenions une direction infiniment voisine de DX rencontrant en $\sigma_1\Sigma_1$ les surfaces stabilisées; pour que σ_1, Σ_1 soient des points quasi aplanétiques, quel que soit l'angle infiniment petit formé par les deux directions, il faut que les deux équations précédentes soient satisfaites pour la valeur $\gamma_0 + d\gamma_0$, c'est-à-dire qu'on ait en plus

$$\frac{d^2A}{d\gamma_0^2} \gamma^2 + \frac{d^2B}{d\gamma_0^2} \gamma + \frac{d^2C}{d\gamma_0^2} = 0,$$

que les racines γ_1, γ_2 soient indépendantes de γ_0 , par suite que les deux valeurs conviennent à des surfaces aplanétiques.

Examinons le cas de ce couple de surfaces aplanétiques; l'équation

des focales sagittales nous a conduits à la relation (7) (*fig. 20, 21*)

$$\frac{\overline{\sigma\Sigma}}{nhH} = \frac{\overline{\sigma'\Sigma'}}{n'h'H'} \text{ et aussi à } \frac{\overline{\sigma_1\Sigma_1}}{nh_1H_1} = \frac{\overline{\sigma'_1\Sigma'_1}}{n'h'_1H'_1}$$

et puisque les points $\sigma, \sigma_1, \Sigma, \Sigma_1$ sont stigmatiques, on peut écrire des relations analogues sur les droites $\sigma_1\Sigma$ et $\sigma\Sigma_1$, c'est-à-dire

$$\frac{\overline{\sigma_1\Sigma}}{nh_1H} = \frac{\overline{\sigma'_1\Sigma'}}{n'h'_1H'} \text{ et } \frac{\overline{\sigma\Sigma_1}}{nhH} = \frac{\overline{\sigma'\Sigma'_1}}{n'h'H'}$$

on peut aisément éliminer les distances à l'axe et obtenir

$$(10) \quad \frac{\overline{\sigma\Sigma} \times \overline{\sigma_1\Sigma_1}}{\overline{\sigma_1\Sigma} \times \overline{\sigma\Sigma_1}} = \frac{\overline{\sigma'\Sigma'} \times \overline{\sigma'_1\Sigma'_1}}{\overline{\sigma'_1\Sigma'} \times \overline{\sigma'\Sigma'_1}}$$

Avant de transformer cette relation, remarquons que les quatre points considérés sont des focales tangentielles et que par suite deux chemins quelconques issus d'un point objet et aboutissant au point image sont égaux (aux quantités du 3^e ordre près en général); on tire aisément de cette forme du principe de Fermat :

$$(11) \quad n \left[(\overline{\sigma_1\Sigma} + \overline{\sigma\Sigma_1}) - (\overline{\sigma\Sigma} + \overline{\sigma_1\Sigma_1}) \right] = n' \left[(\overline{\sigma'_1\Sigma'} + \overline{\sigma'\Sigma'_1}) - (\overline{\sigma'\Sigma'} + \overline{\sigma'_1\Sigma'_1}) \right]$$

Évaluons les lignes de l'espace objet en fonction de $\sigma\sigma_1 = e$, $\Sigma\Sigma_1 = E$, de la longueur μ du segment qui joint les milieux de $\sigma\sigma_1$, $\Sigma\Sigma_1$, et les angles b, B que fait la droite μ avec les demi-perpendiculaires à $\sigma\sigma_1, \Sigma\Sigma_1$ dirigées vers l'axe; les carrés des longueurs s'expriment exactement, nous devons expliciter les longueurs elles-mêmes, en ne conservant que les termes du 2^e ordre; on aura :

$$\begin{aligned} \overline{\sigma\Sigma} &= \mu + E \sin B + e \sin b + \frac{(E \cos B - e \cos b)^2}{2\mu} \\ \overline{\sigma_1\Sigma_1} &= \mu - E \sin B - e \sin b + \frac{E \cos B - e \cos b)^2}{2\mu} \\ \overline{\sigma_1\Sigma} &= \mu + E \sin B - e \sin b + \frac{(E \cos B + e \cos b)^2}{2\mu} \\ \overline{\sigma\Sigma_1} &= \mu - E \sin B + e \sin b + \frac{(E \cos B + e \cos b)^2}{2\mu} \end{aligned}$$

et quatre égalités analogues dans l'espace image.

Equation des focales tangentielles. — Si on substitue ces valeurs dans l'équation de Fermat (11) on obtient

$$\frac{neE \cos b \cos B}{\mu} = \frac{n'e'E' \cos b' \cos B'}{\mu'}$$

cette relation n'apprend rien de nouveau, car elle n'est pas autre chose à la limite que la relation

$$\frac{n\gamma}{n'\gamma'} = \Gamma_i \gamma_i$$

Γ_i et γ_i étant les rapports de convergence tangentiels en σ , Σ , et elle donnerait l'équation des focales tangentielles en remarquant que si T est l'intersection lointaine de $\sigma\Sigma$ et $\sigma_1\Sigma_1$, du , du' étant les angles en T et T' on a : $e \cos b = T\sigma du$, $e' \cos b' = T'\sigma' du'$, $E \cos B = T\Sigma du$, $E' \cos B' = T'\Sigma' du'$; dès lors,

$$\frac{nT\sigma \times T\Sigma du^2}{T\Sigma - T\sigma} = \frac{n'T'\sigma' \times T'\Sigma' du'^2}{T'\Sigma' - T'\sigma'}$$

conduit sans difficulté à la forme habituelle de l'équation des focales tangentielles; cette relation a donc lieu en l'absence de tout stigmatisme.

Il n'en est pas de même de celle que l'on obtient par la substitution dans la relation (10); elle n'a lieu que si les quatre points considérés sont stigmatiques et elle devient :

$$\frac{Ee \cos (B - b)}{\mu^2} = \frac{E'e' \cos (B' - b')}{\mu'^2}$$

Il est facile d'éliminer E, e entre les 2 égalités, puis d'annuler les éléments de longueur e, E, e', E'; et en désignant par ρ , ρ' les distances des deux points σ , Σ et de leurs images, on obtient

$$\frac{1}{n\rho} (1 + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} B) = \frac{1}{n'\rho'} (1 + \operatorname{tg} b' \operatorname{tg} B')$$

les angles qui figurent dans cette relation étant ceux des normales aux surfaces, avec les droites qui joignent les points conjugués.

1° Aux points où les surfaces considérées rencontrent l'axe, c'est-à-dire aux sommets $b = 0$, $B = 0$, $b' = 0$, $B' = 0$; si ρ_0 , ρ'_0 sont les distances des sommets, $n\rho_0 = n'\rho'_0$; les sommets sont des points inverses;

2° Chacune des surfaces se confond évidemment avec la surface de Petzval qui résulte d'une diaphragmation au sommet de l'autre; or, nous avons vu que la surface de Petzval est définie par $n\rho_1 = n'\rho'_1$ (origine au sommet); on a donc $\text{tg } b_0 \text{ tg } B_1 = \text{tg } b'_0 \text{ tg } B'_1$, ce qui exige

$$\frac{\text{tg } B'_1}{\text{tg } B_1} = \frac{1}{\gamma_i} = \Gamma_i, \quad \frac{\text{tg } b'_0}{\text{tg } b_0} = \frac{1}{\Gamma_i} = \gamma_i,$$

puisque $\frac{\text{tg } b'_0}{\text{tg } b_0} = \gamma_i$ est le rapport de convergence tangentiel au sommet de la surface τ , et Γ_i celui qui correspond au point où la surface Σ rencontre la direction considérée;

3° Reprenons les droites $\sigma\Sigma$, $\sigma'\Sigma'$ dans une position quelconque;

on a (12)

$$\frac{n\rho}{n^2hH} = \frac{n'\rho'}{n'^2h'H'}$$

or, en raison des propriétés des surfaces de Petzval produites par diaphragmation au sommet, ou plus simplement, parce que l'on a

$$nH = n\rho_1 \sin u, \quad n'H' = n'\rho'_1 \sin u', \quad \frac{nH}{n'H'} = \frac{1}{\alpha} \text{ et de même}$$

$$\frac{nh}{n'h'} = \alpha, \text{ il en résulte :}$$

$$n\rho = n'\rho' \quad \text{et} \quad \text{tg } b \text{ tg } B = \text{tg } b' \text{ tg } B';$$

mais si on regarde l'élément $\Sigma\Sigma_1$ comme défini par rapport à l'origine σ et à la normale en ce point par le rayon vecteur ρ et par l'angle b on a

$$\text{tg } B = -\frac{d\rho}{\rho db}, \quad \text{de même} \quad \text{tg } B' = -\frac{d\rho'}{\rho' db'};$$

dès lors, $-\frac{d\rho \text{ tg } b}{\rho db} = -\frac{d\rho' \text{ tg } b'}{\rho' db'}$ et puisque $n\rho = n'\rho'$ $nd\rho = n'd\rho'$,

$$\frac{db}{\text{tg } b} = \frac{db'}{\text{tg } b'} \quad \frac{\sin b'}{\sin b} = \text{constante} = \alpha \frac{\cos \omega'}{\cos \omega} \quad (\omega, \omega' \text{ angles des normales avec l'axe}), \text{ car le principe de Fermat exige}$$

$$ne \sin b - n'e' \sin b' = \text{constante} = 0.$$

$$\frac{\sin b'}{\sin b} = \frac{ne}{n'e'} = \frac{ndh}{n'dh'} \cdot \frac{\cos \omega'}{\cos \omega} = \alpha \frac{\cos \omega'}{\cos \omega}$$

La condition des sinus doit être vérifiée en l'un quelconque des points de chacune des deux surfaces aplanétiques, pour les angles que font les directions conjuguées avec les normales (*qui sont elles-mêmes des droites conjuguées*).

De plus, $\frac{\operatorname{tg} b'}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} B'}$ entraîne $\frac{db'}{db} = \frac{dB}{dB'}$; en deux points quelconques appartenant à la même section principale et à deux surfaces aplanétiques, les rapports de convergence tangentiels sont inverses suivant la droite qui les joint (ceci résulte d'ailleurs de la proposition générale $\gamma\gamma_1 = \frac{n\rho}{n'\rho'}$).

Puisque les normales aux points conjugués sont des droites conjuguées, les centres de courbure sont évidemment des conjugués de Gauss, et les rayons de courbure r, r' de la première surface, R, R' de la deuxième, sont déterminés par les relations

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{nr} - \frac{1}{\alpha n'r'} &= \frac{1}{k}, & \frac{1}{nr} - \frac{1}{n'r'} &= V, & nr &= \frac{k(\alpha^2 - 1)}{\alpha - kV}, \\ n'r' &= \frac{k(\alpha^2 - 1)}{\alpha(1 - \alpha kV)} & \frac{1}{\alpha nR} - \frac{\alpha}{n'R'} &= \frac{1}{k} & \frac{1}{nR} - \frac{1}{n'R'} &= V \\ nR &= -\frac{k(\alpha^2 - 1)}{\alpha(1 - \alpha kV)} & n'R' &= -\frac{k(\alpha^2 - 1)}{\alpha - kV} \\ nR &= -n'r' & n'R' &= -nr. \end{aligned}$$

Mais les conditions trouvées n'imposent pas seulement cette relation entre les rayons de courbure; elles déterminent complètement les méridiennes des surfaces aplanétiques.

Nous allons poser $h = y, h' = y', H = Y, H' = Y'$ et désignons par x, x', X, X' les abscisses par rapport aux sommets des points stigmatiques deux à deux conjugués, en convenant que le sens positif pour XX' est l'inverse du sens habituel, qui est celui de xx' .

Écrivons la relation $n^2\rho^2 = n'^2\rho'^2$

$$\begin{aligned} n^2(Y - y)^2 + \left[k\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) - n\alpha - nX \right]^2 &= n'^2(Y' - y')^2 \\ &+ \left[k\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) - n'x' - n'X' \right]^2 \end{aligned}$$

et comme cas particuliers, pour des rayons vecteurs issus des sommets,

$$\begin{aligned} n^2Y^2 + \left[k\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) - nX \right]^2 &= n'^2Y'^2 + \left[k\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) - n'X' \right]^2 \\ n^2y^2 + \left[k\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) - n\alpha \right]^2 &= n'^2y'^2 + \left[k\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) - n'\alpha' \right]^2 \end{aligned}$$

ces trois équations exigent

$$-2 n^2 Y y + 2 n^2 X x = -2 n'^2 Y' y' + 2 n'^2 X' x';$$

or, $\frac{ny}{n'y'} = \frac{n'Y'}{nY} = \alpha$; il reste donc $n^2 X x = n'^2 X' x'$ ou $\frac{nx}{n'x'} = \frac{n'X'}{nX} = \text{Cte}$

puisque l'on peut laisser l'un des points fixe tandis que l'on fait varier l'autre; dès lors, pour déterminer la constante il suffira de prendre l'une des valeurs limites lorsque x et x' tendent vers 0.

$$nx : n'x' = \frac{n^2 y^2}{nr} : \frac{n'^2 y'^2}{n'r'} = \alpha \frac{n'r'}{nr} = \alpha \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV}$$

Il est visible que les quatre relations

$$\frac{ny}{n'y'} = \frac{n'Y'}{nY} = \alpha, \quad \frac{nx}{n'x'} = \frac{n'X'}{nX} = \alpha \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV}$$

vont nous permettre d'écrire les équations des méridiennes des quatre surfaces, conjuguées aplanétiquement deux à deux.

Pour les surfaces objets on trouve

$$(a) \quad \begin{aligned} n^2 y^2 &= 2 knx \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - kV} - n^2 x^2 \left(1 + \frac{1 - k^2 V^2}{(\alpha - kV)^2} \right) \\ n^2 Y^2 &= 2 knX \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha(1 - \alpha kV)} - n^2 X^2 \left(1 + \frac{\alpha^2(1 - k^2 V^2)}{(1 - \alpha kV)^2} \right) \end{aligned}$$

ou en mettant en évidence le rapport de convergence correspondant $\frac{1}{\alpha}$

$$(a') \quad \begin{aligned} n^2 y^2 &= 2 knx \frac{1 - \frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\alpha} - kV} - n^2 x^2 \left(1 + \frac{1 - k^2 V^2}{\left(\frac{1}{\alpha} - kV\right)^2} \right) \\ n^2 Y^2 &= 2 knX \frac{1 - \frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\alpha} - kV} - n^2 X^2 \left(1 + \frac{1 - k^2 V^2}{\left(\frac{1}{\alpha} - kV\right)^2} \right) \end{aligned}$$

les surfaces images seront obtenues par des substitutions qui permuteront seulement les coefficients

$$(a'') \quad \begin{aligned} n'^2 y'^2 &= 2 kn'x' \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha(1 - \alpha kV)} - n'^2 x'^2 \left(1 + \frac{\alpha^2(1 - k^2 V^2)}{(1 - \alpha kV)^2} \right) \\ n'^2 Y'^2 &= 2 kn'X' \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - kV} - n'^2 X'^2 \left(1 + \frac{1 - k^2 V^2}{(\alpha - kV)^2} \right) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc énoncer cette importante proposition :

Si dans un système centré il existe deux couples de surfaces conjuguées

guées aplanétiques, les quatre surfaces, qui sont nécessairement des coniques, ont des méridiennes représentées par les quatre équations ci-dessus.

Si $kV = \pm 1$, ces coniques sont nécessairement des circonférences de cercle. Or, $kV = -1$ est la condition réalisée pour le dioptré; il en résulte qu'un dioptré ne peut présenter un couple de surfaces aplanétiques que si ces surfaces sont des sphères; d'autre part, il existe toujours deux surfaces aplanétiques confondues sur la surface de séparation des deux milieux; si cette surface n'est pas sphérique il ne pourra pas exister deux autres surfaces aplanétiques; *le dioptré sphérique est donc le seul dioptré qui puisse présenter, en dehors de la surface de séparation, des surfaces aplanétiques.*

Si après avoir fait $kV = -1$ on prend $\alpha = \frac{n}{n'}$, les surfaces qui correspondent à ce rapport de convergence deviennent :

$$x^2 + y^2 - 2kx \frac{n-n'}{nn'} = 2rx \quad x'^2 + y'^2 = 2kx' \frac{n-n'}{nn'} = 2rx'$$

qui représentent les deux sphères confondues; les autres sphères aplanétiques ont pour équations

$$X^2 + Y^2 = 2kX \frac{n'-n}{nn'} \times \frac{n'}{n} \quad X'^2 + Y'^2 = 2kX' \frac{n-n'}{nn'} \times \frac{n}{n'}$$

qui représentent (avec le signe adopté pour X, X') les surfaces aplanétiques bien connues.

POINTS B. — Les résultats précédents permettent de trouver, en dehors de toute approximation, les points B.

Si on exprime que deux droites conjuguées, joignant deux points des deux surfaces aplanétiques objet et les deux points images conjugués, rencontrent l'axe en deux points conjugués stigmatiquement ces deux points sont nécessairement des points B; si β est le rapport de convergence correspondant, on a

$$\frac{k(\beta - \alpha) + nx}{ny} = \frac{k\left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right) - nX}{nY}$$

$$\frac{k\left(\frac{\beta - \alpha}{\beta x}\right) + n'x'}{n'y'} = \frac{k\left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha} - n'X'}{n'Y'}$$

cette dernière se transforme aisément, par élimination de $x'y'X'Y'$ et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{ny}{nY} &= \frac{k(\beta - \alpha) + nx}{k\left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right) - nX} = \frac{k(\beta - \alpha) + nx\beta \frac{1 - \alpha kV}{\alpha - kV}}{k\left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right) - nX\beta \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV}} \\ &= \frac{nx\left(1 - \beta \frac{1 - \alpha kV}{\alpha - kV}\right)}{nX\left(\beta \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV} - 1\right)} \end{aligned}$$

D'autre part, les équations des surfaces objet vont nous donner

$$\frac{nx\left(1 - \beta \frac{1 - \alpha kV}{\alpha - kV}\right)^2}{nX\left(\beta \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV} - 1\right)^2} = \frac{2k \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - kV} - nx\left(1 + \frac{1 - k^2 V^2}{(\alpha - kV)^2}\right)}{2k \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha(1 - \alpha kV)} - nX\left(1 + \frac{\alpha^2(1 - k^2 V^2)}{(1 - \alpha kV)^2}\right)}$$

Ces diverses équations en x, X , devant avoir lieu pour une infinité de valeurs correspondantes de x et de X , ne constituent qu'une seule relation (homographique) entre X et x , dépourvue de terme indépendant des variables; l'identification conduirait à la relation déjà trouvée entre α, β et kV ; mais on obtiendra un résultat beaucoup plus complet par une voie un peu différente et qui permettra, en même temps, de calculer la constante $k' = k_s = k_r$. D'ailleurs, en chaque point des surfaces aplanétiques, le rapport de convergence sagittal étant précisément α ou $\frac{1}{\alpha}$ on aura :

$$\begin{aligned} k' \left(\frac{\sin u'}{\sin u} - \alpha \right) \sin u &= ny & k' \left(\frac{\sin u'}{\sin u} - \alpha \right) \cos u &= k(\beta - \alpha) - nx \\ k' \left(\frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{1}{\alpha} \right) \sin u &= nY & k' \left(\frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{1}{\alpha} \right) \cos u &= k\left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right) - nX \\ k' \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\sin u}{\sin u'} \right) \sin u' &= n'y' & k' \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\sin u}{\sin u'} \right) \cos u' &= k\left(\frac{1}{\alpha} - \beta\right) + n'x' \\ k' \left(\alpha - \frac{\sin u}{\sin u'} \right) \sin u' &= n'Y' & k' \left(\alpha - \frac{\sin u}{\sin u'} \right) \cos u' &= k\left(\alpha - \beta\right) - n'X' \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u &= \frac{ny}{k(\beta - \alpha) + nx} = \frac{nY}{k\left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right) - nX} & \frac{ny}{n'y'} &= \frac{n'Y'}{nY} = \alpha \\ \operatorname{tg} u' &= \frac{n'y'}{k\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) + n'x'} = \frac{n'Y'}{k\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) - n'X'} & \frac{nx}{n'x'} &= \frac{n'X'}{nX} = \alpha \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV} \\ \frac{\operatorname{tg} u'}{\beta \operatorname{tg} u} &= \frac{k(\beta - \alpha) + nx}{k(\beta - \alpha) + nx\beta \frac{1 - \alpha kV}{\alpha - kV}} = \frac{k\left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right) - nX}{k\left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right) - \beta nX \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV}} \end{aligned}$$

On tire aisément de là nx et nX et en les portant dans les équations en k' on a

$$\begin{aligned} k' \left(\frac{\sin u'}{\sin u} - \alpha \right) \cos u &= k(\beta - \alpha) \frac{\operatorname{tg} u'}{\beta \operatorname{tg} u} \frac{1 - \beta \frac{1 - \alpha kV}{\alpha - kV}}{1 - \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \times \frac{1 - \alpha kV}{\alpha - kV}} \\ k' \left(\frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{1}{\alpha} \right) \cos u &= k \left(\beta - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\operatorname{tg} u'}{\beta \operatorname{tg} u} \frac{1 - \beta \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV}}{1 - \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \times \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV}} \end{aligned}$$

C'est une de ces deux formules que nous donnera k' . Éliminons k'

$$\frac{\left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{\sin u'}{\sin u} - \alpha\right)}{\left(\beta - \alpha\right) \left(\frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{1 - \beta \frac{1 - \alpha kV}{\alpha - kV}}{1 - \beta \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV}} \times \frac{1 - \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV}}{1 - \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \frac{1 - \alpha kV}{\alpha - kV}}$$

une transformation visible des rapports nous donne, après suppression du facteur commun $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$

$$\begin{aligned} (13) \quad & \frac{\frac{\sin u'}{\sin u} - \beta}{2 \left(1 + \beta \frac{\sin u'}{\sin u}\right) - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{\sin u'}{\sin u} + \beta\right)} \\ & \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} - \beta\right) (1 - k^2 V^2)}{2 \left(1 + \beta \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}\right) \left[(1 + k^2 V^2) - kV \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right] - \left(\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} + \beta\right) \left[\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) (1 + k^2 V^2) - 4kV\right]} \end{aligned}$$

or, notre hypothèse suppose que sur toute direction passant par le

point B, il y a trois points stigmatiques; dès lors, la condition d'identité des équations des focales exige que $\beta = \operatorname{tg} \frac{u'}{2} : \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ et moyennant cette relation, nous démontrerons que l'égalité précédente (13) ayant lieu pour toutes les valeurs de u et de u' , le point B existe (réel ou imaginaire); en d'autres termes, la condition $\beta = \operatorname{tg} \frac{u'}{2} : \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ qui est nécessaire pour l'existence du point stigmatique B, est suffisante dans le dispositif que nous envisageons, pourvu que l'on donne à β une valeur convenable.

L'introduction de cette condition au numérateur permet l'élimination du facteur commun $\cos^2 \frac{u'}{2} - \cos^2 \frac{u}{2}$ (c'est-à-dire de $\beta = \pm 1$).

Tirons la valeur de $\alpha + \frac{1}{x}$; on a d'abord

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos u'}{2 \left(1 + \beta \frac{\sin u'}{\sin u} \right) - \left(\alpha + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{\sin u'}{\sin u} + \beta \right)} \\
 = & \frac{k^2 V^2 - 1}{2 \left(1 + \beta \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \right) (1 + k^2 V^2) + 4kV \left(\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} + \beta \right) - \left(\alpha + \frac{1}{x} \right) \left[2kV \left(1 + \beta \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \right) + \left(\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} + \beta \right) (1 + k^2 V^2) \right]} \\
 \text{puis} \quad & \alpha + \frac{1}{x} = \\
 = & \frac{2 \cos u' \left[\left(1 + \beta \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \right) (1 + k^2 V^2) + 4kV \left(\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} + \beta \right) \right] - 2 \left(1 + \beta \frac{\sin u'}{\sin u} \right) (k^2 V^2 - 1)}{\cos u' \left[2kV \left(1 + \beta \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \right) + \left(\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} + \beta \right) (1 + k^2 V^2) \right] - \left(\frac{\sin u'}{\sin u} + \beta \right) (k^2 V^2 - 1)} \\
 \text{exprimant} \quad & \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \text{ et } \frac{\sin u'}{\sin u} \text{ en } \beta \quad \frac{\sin u'}{\sin u} = \beta \frac{\cos^2 \frac{u'}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2}} \quad \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \beta \frac{\cos u}{\cos u'} \frac{\cos^2 \frac{u'}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2}} \\
 \alpha + \frac{1}{x} \text{ ne contient plus que la seule variable } & \operatorname{tg} \frac{u}{2} \\
 (14) \quad \alpha + \frac{1}{x} = & 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} [2\beta^2 + kV\beta(1 + \beta^2)] - [2kV\beta + k^2 V^2(1 + \beta^2)]}{\operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} [\beta(1 + \beta^2) + 2kV\beta^2] - [kV(1 + \beta^2) + 2\beta k^2 V^2]} \\
 = & \frac{2(\beta \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} - kV) [2\beta + kV(1 + \beta^2)]}{(\beta \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} - kV) [2kV\beta + (1 + \beta^2)]}
 \end{aligned}$$

on retrouve ainsi la valeur de $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ donnée par la deuxième approximation et il est bien visible que la relation qui donne α en fonction de β , et réciproquement, ne dépend pas de la valeur de u . Ainsi est déterminé le point B sans approximation.

EXPRESSION DE $k' = k_s = k$, AU POINT B. — Les deux valeurs de k' nous donnent

$$\frac{k'}{k} \left(\frac{\frac{\sin u'}{\sin u} - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{\frac{\sin u'}{\sin u} - \frac{1}{\alpha}}{\beta - \frac{1}{\alpha}} \right) \cos u = \frac{\operatorname{tg} u'}{\beta \operatorname{tg} u} \left(\frac{1 - \beta \frac{1 - \alpha kV}{\alpha - kV}}{1 - \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \frac{1 - \alpha kV}{\alpha - kV}} - \frac{1 - \beta \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV}}{1 - \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \frac{\alpha - kV}{1 - \alpha kV}} \right)$$

$$\frac{k' \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \cos u \left(\frac{\sin u'}{\sin u} - \beta \right)}{\beta^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \beta + 1} = \frac{\frac{\operatorname{tg} u'}{\beta \operatorname{tg} u} \left(\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} - \beta \right) \frac{(k^2 V^2 - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)}{(k^2 V^2 + 1) - kV \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)}}{\frac{\operatorname{tg}^2 u'}{\operatorname{tg}^2 u} - \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \frac{(k^2 V^2 + 1) \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - 4kV}{(k^2 V^2 + 1) - kV \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)}} + 1$$

on élimine comme précédemment le facteur $\alpha - \frac{1}{\alpha}$ et $\cos^2 \frac{u'}{2} = \cos^2 \frac{u}{2}$;
on introduit ensuite dans les termes en kV la valeur

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \frac{2\beta + kV(1 + \beta^2)}{2\beta kV + 1 + \beta^2}$$

$$\frac{\frac{k'}{k} \cos u}{\beta^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \beta + 1} = \frac{\operatorname{tg} u'}{\beta \operatorname{tg} u \cos u'} \times \frac{\frac{1 + \beta^2 + 2\beta kV}{1 + \beta^2 - 2\beta kV}}{\left(\frac{\operatorname{tg}^2 u'}{\operatorname{tg}^2 u} + 1 \right) - \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} 2 \frac{2\beta - kV(1 + \beta^2)}{1 + \beta^2 - 2\beta kV}}$$

$$\frac{k'}{k} \cos u \cos u' = \frac{(\beta^2 - 1)^2}{\beta \left(\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} + \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'} \right) (1 + \beta^2 - 2\beta kV) - 2\beta [2\beta - kV(1 + \beta^2)]}$$

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k} \left[\cos u \cos u' + \lg^2 \frac{u}{2} \left(\beta \cos^2 \frac{u'}{2} - \cos^2 \frac{u}{2} \right) \left(\frac{\beta^2 \cos u}{\cos^2 \frac{u}{2}} - \frac{\cos u'}{\cos^2 \frac{u'}{2}} \right) \frac{\beta^2 + 1 - 2\beta kV}{(\beta^2 - 1)^2} \right]$$

$$(7) \quad \frac{1}{k'} = \frac{1}{k} \left[\cos u \cos u' + \lg^2 \frac{u}{2} \frac{\beta^2 \cos^2 \frac{u'}{2} - \cos^2 \frac{u}{2}}{\beta^2 - 1} (\beta^2 + 1 - 2\beta kV) \right]$$

Pour retrouver le cas du dioptré sphérique, il suffit d'abord de faire $u' = u$, $\beta = 1$; le terme, qui prend la forme indéterminée, a pour vraie valeur $\cos^4 \frac{u}{2}$ et

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{\sin^2 u}{2} (1 + kV) \right]$$

si, ensuite, on prend $kV = -1$, $k = k'$ comme dans le dioptré sphérique. Cette formule (7) doit donner la valeur approchée (8) si on ne conserve que les quantités du 2^e ordre, on a en effet

$$(8) \quad \frac{1}{k'} = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{u^2}{4} (\beta^2 + 2kV\beta + 1) \right]$$

On peut se demander, dans l'hypothèse de l'existence d'un point B unique, à quoi correspondent les deux valeurs de α tirées de l'équation (14). On voit aisément qu'en général elles ne correspondent pas aux points de Fermat, car ceux-ci, donnés par l'équation $\Phi\beta = 0$, ne sont pas inverses; il suffit de se reporter à la valeur (2^e partie) de la fonction de coma.

D'ailleurs, même si deux des racines de $\Phi\beta$ sont inverses, c'est-à-dire si $\Lambda_2\beta + \frac{B_2 - k}{2} = \frac{k}{2} \frac{\beta^2 + 1 + 2\beta kV}{\beta^2 - 1}$, les deux racines inverses dont la somme est $2 \frac{kV(1 + \beta^2) + 2\beta}{\beta^2 + 1 + 2\beta kV}$, et qui représentent des points sans coma pour une diaphragmation en B, ne donnent pas nécessairement des surfaces aplanétiques, il est encore indispensable que les deux racines α et $\frac{1}{\alpha}$ annulent le coefficient de γ_0 , afin que les surfaces correspondantes soient des surfaces de Fermat quel que soit γ_0 ; si on exprime cette condition on détermine la

valeur de Λ_2 à l'aide de la formule déjà rencontrée (2^e partie)

$$\Lambda_2 = \frac{k\beta(\beta^2 + 1 + 2\beta kV)}{(\beta^2 - 1)^2}$$

La troisième racine de l'expression du troisième degré, coefficient de γ_0 , est alors $x = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2\beta}$ et la fonction de coma devient :

$$\Phi = \frac{\beta k(\beta^2 + 1 + 2\beta kV)}{(\beta^2 - 1)^2} \left\{ (\gamma_0 - \beta) \left[\left(\gamma - \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \right) (\gamma - \alpha) \right. \right. \\ \left. \left. \left(\gamma - \frac{1}{\alpha} \right) \right] + (\gamma - \beta) \left(\gamma - \frac{1}{\alpha} \right) (\gamma - \alpha) \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} \right\}$$

Le troisième point sans coma sera donné par

$$\gamma \frac{2\gamma_0\beta - \beta^2 - 1}{\beta} = \gamma_0 \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) - 2$$

qui permet de vérifier que pour $\gamma_0 = \beta$, $\gamma = \beta$; pour $\gamma_0 = \frac{1}{\beta}$, $\gamma = \frac{1}{\beta}$

Il est clair que les résultats précédents constituent uniquement d'intéressantes vérifications.

On est ramené au cas du dioptré et à $\gamma = 1$, si $\beta = 1$. On peut d'ailleurs rendre la formule indépendante de V en remplaçant kV par sa valeur, et obtenir

$$\Phi = k \frac{x\beta}{(x - \beta(1 - x^2))} \left\{ (\gamma_0 - \beta) \left[\left(\gamma - \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \right) (\gamma - \alpha) \left(\gamma - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right. \\ \left. + (\gamma - \beta) (\gamma - \alpha) \left(\gamma - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} \right\}$$

L'étude du dispositif comprenant deux couples (objet, image) de surfaces aplanétiques nous a permis d'établir les propositions suivantes :

I. Pour un seul des deux couples :

1^o Le centre de courbure de la surface objet et celui de la surface image sont des points conjugués de Gauss;

2^o Les normales à la surface image sont respectivement conjuguées des normales à la surface objet (cette proposition contient la première);

3^o En chaque point de la surface aplanétique, le rapport de convergence sagittal a une même valeur α , qui est celle du rapport de convergence au sommet de la surface;

4° En chaque point, également, et sur des directions conjuguées faisant avec les normales des angles b, b' , le rapport de convergence tangentiel est égal à $\frac{\operatorname{tg} b'}{\operatorname{tg} b}$;

5° (Corollaire du précédent). — La condition des sinus est vérifiée en chaque point de la surface pour les angles que font les rayons conjugués avec les normales $\frac{\sin b'}{\sin b} = \alpha \frac{\cos \omega'}{\cos \omega}$, ω, ω' étant les angles des normales avec l'axe.

II. Pour l'ensemble des deux couples :

1° Les deux couples de surfaces aplanétiques rencontrent l'axe en des couples de points inverses :

2° Les segments conjugués ρ, ρ' joignant (dans une section principale) deux points objets appartenant respectivement à deux surfaces objets, et les deux points images sont liés par la relation $n\rho = n'\rho'$ (cette proposition contient la première) ;

3° Les rayons de courbure r, r' , du premier couple, R, R' du second sont liés par les relations $nR' = -n'r, n'R = -nr$;

4° Les méridiennes des surfaces sont des coniques dont les équations ont les formes (a, a', a'') en correspondance nécessaire.

Il faut remarquer que les deux premières propositions du premier groupe, montrent que si la surface objet fait partie d'un système de surfaces d'onde de l'espace objet, la surface image sera l'une des surfaces d'onde correspondantes de l'espace image ; la longueur optique est la même entre deux points stigmatiques quelconques, (image et objet) appartenant à ces deux surfaces, ce sera la longueur optique entre les deux surfaces.

Les deux premières propositions du second groupe pourront s'énoncer :

La longueur optique entre les deux surfaces de l'un des couples est égale à la longueur optique entre les deux surfaces de l'autre.

En particulier, si l'une des longueurs est nulle (dioptré), l'autre l'est également.

Conditions de l'aplanétisme hors de l'axe.

Soient P, M , (*fig. 21*) deux points voisins d'une même section principale ; deux droites contenues dans cette section se coupent en T ; $P'T', M'T'$ sont les droites conjuguées de PT, MT . Si P et M appartiennent

à une surface aplanétique objet, la différence des chemins optiques [MM'], [PP'] est une quantité constante indépendante des chemins cartésiens parcourus et qui s'annule évidemment avec MP; d'autre part, la variation du chemin optique [TT'] est du troisième ordre par rapport à MP; on peut donc, en négligeant les quantités de cet ordre, écrire

$$[MM'] - [PP'] = \Delta = n\overline{MP} \cos b - n \frac{\overline{MP}^2 \sin^2 b}{2\overline{MT}} - n' \overline{M'P'} \cos b' + n' \frac{\overline{M'P'}^2 \sin^2 b}{2\overline{M'T'}}$$

b, b' désignant les angles de MT, M'T' avec MP, M'P'; on peut remplacer MT par l'abscisse de la focale tangentielle limite de T, soit l, et M'T' par l'. Posons $\Delta = cn' \overline{M'P'} + c_1 \frac{n'^2 \overline{M'P'}^2}{2}$, on aura

$$c + \frac{c_1}{2} n' \overline{M'P'} = -\cos b' + \cos b \frac{n\overline{MP}}{n' \overline{M'P'}} + \frac{n' \overline{M'P'}}{2} \left(\frac{\sin^2 b'}{n'l'} - \frac{n^2 \overline{MP}^2}{n'^2 \overline{M'P'}^2} \frac{\sin^2 b}{nl} \right)$$

Remarquons que: limite $\frac{n\overline{MP} \sin b}{n' \overline{M'P'} \sin b'} = \gamma_t = \frac{db'}{db}$ rapport de convergence tangentielle, au point M, dans la direction MT.

Désignons par b_0, b'_0 les angles de MT, M'T' avec les tangentes aux points M, M', par R, R' les rayons de courbure en M et M'; on a

$$\cos b = \cos b_0 + \sin b_0 \frac{\overline{MP}}{2R} \quad \sin b = \sin b_0 - \cos b_0 \frac{\overline{MP}}{2R} \quad \text{de même pour } b'_0, b'$$

$$(9) \quad \frac{n\overline{MP}}{n' \overline{M'P'}} = \gamma_t \frac{\sin b'}{\sin b} \left(1 + \frac{Q}{2} n' \overline{M'P'} \right) \\ c + \frac{c_1}{2} n' \overline{M'P'} = -\cos b' + \cos b \frac{\sin b'}{\sin b} \gamma_t \\ + \frac{n' \overline{M'P'} \sin^2 b'_0}{2} \left(2 \frac{\cos b_0}{\sin b_0 \sin b'_0} \gamma_t + \frac{1}{n'l'} - \frac{\gamma_t^2}{nl} \right) \\ = -\cos b'_0 + \cos b_0 \frac{\sin b'_0}{\sin b_0} \gamma_t + n' \overline{M'P'} \left(\dots \right)$$

l'identification des termes constants (puisque $\gamma_t = \frac{db'_0}{db_0}$) conduit à

$$\frac{-db_0 \sin b_0}{\cos b_0} = \frac{-db'_0 \sin b'_0}{c + \cos b'_0}$$

d'où $(\cos b'_0 + c) = \gamma \cos b_0$, γ étant une constante dont la signification est donnée par $db'_0 \sin b'_0 = \gamma db_0 \sin b_0$

$$\gamma = \gamma_t \frac{\sin b'_0}{\sin b_0} = \text{limite de } \frac{\overline{nMP}}{n'M'P'} = \frac{nds}{n'ds'} \quad (ds, ds', \text{ arcs infiniment petits})$$

on peut dès lors poser

$$\frac{nMP}{n'M'P'} = \gamma \left(1 + \frac{L}{2} n'M'P' \right) \text{ l'égalité (9) s'écrit}$$

$$c_1 = \sin^2 b'_0 \left(\frac{1}{n't'} - \frac{\gamma_t^2}{nt} \right) - \frac{\sin b'_0}{n'R'} + \frac{\gamma^2 \sin b_0}{nR} + \cos b_0 L \gamma$$

et l'équation des focales tangentielles devient

$$\frac{\gamma_t}{nt} - \frac{1}{\gamma_t n't'} = \frac{1}{\sin b'_0} \left(\frac{\gamma}{nR} - \frac{1}{\gamma_t n'R'} \right) + \frac{L \gamma \cos b_0 - c_1}{\sin^2 b'_0}$$

$$= \left(\frac{\gamma_t}{nR \sin b_0} - \frac{1}{\gamma_t n'R' \sin b'_0} \right) + \frac{L \gamma \cos b_0 - c_1}{\sin^2 b'_0}$$

on retrouverait sans difficulté ce qui est relatif au sommet de la surface; c , étant nécessairement nul au sommet, la relation des sinus y prend la forme :

$$\gamma = \alpha = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - b'_0 \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - b_0 \right)}.$$

On voit bien, également, que la relation des sinus ne peut être satisfaite aux divers points de la surface aplanétique (objet), que si $c = 0$, c'est-à-dire si la variation du chemin optique entre deux couples de points voisins est partout du second ordre; et cela implique la correspondance des normales comme directions conjuguées; or, si les normales sont conjuguées, les centres de courbure (au sommet) des surfaces aplanétiques sont conjugués, et par suite la constante c_1 relative au sommet est nulle comme c , (la variation Δ est au plus du 4^e ordre).

Retour à la réduction des coefficients de la fonction d'astigmatisme.

La réduction à cinq paramètres distincts des neuf coefficients de la fonction d'astigmatisme a été obtenue à l'aide d'une méthode, que l'élimination des solutions étrangères laisse sujette à quelques critiques. Je me propose de présenter une autre méthode qui échappe à ces reproches mais qui, d'autre part, n'établit que trois relations entre les neuf coefficients.

Soient deux droites rencontrant l'axe en deux points M, M_1 , et se coupant en A ; leurs conjuguées rencontrent l'axe en M', M'_1 , et se coupent en A' (*fig. 22*). Soit $[MM']$ la longueur optique en passant par A , et $[MM']_0$ la longueur optique suivant l'axe; de même pour $[M_1M'_1]$ et $[M_1M'_1]_0$.

Si P désigne la fonction d'aberration au point M (γ_0), et P_1 cette fonction au point M_1 ($\gamma_0 + \delta\gamma_0$), u et $u + \delta u$ les inclinaisons des rayons incidents on a :

$$[MM'] - [MM']_0 = \frac{1}{8} Pu^4 \quad [M_1M'_1] - [M_1M'_1]_0 = \frac{1}{8} P_1(u + \delta u)^4$$

$$\text{or } [MM'] = nMA + [AA'] - n'M'A' \quad [M_1M'_1] = nM_1A + [AA']_1 - n'M'_1A'$$

$$[MM']_0 = nMM_1 + [M_1M'_1]_0 - n'M'M'_1$$

$$[M_1M'_1] - [M_1M'_1]_0 - [MM'] + [MM']_0 = \frac{P_1(u + \delta u)^4}{8} - \frac{Pu^4}{8}$$

$$n(M_1A - MA + MM_1) - n'(M'_1A' - M'A' + M'M'_1) + [AA']_1 - [AA']$$

$$= \frac{P_1(u + \delta u)^4}{8} - \frac{Pu^4}{8}$$

or, la variation de chemin optique $[AA']_1 - [AA'] = \Phi \frac{u\delta u^3}{4} + P' \frac{\delta u^4}{8}$, Φ étant la fonction de coma et P' la fonction d'aberration au point γ qui correspond au point A ; on a donc :

$$\frac{P_1(u + \delta u)^4}{8} - \frac{Pu^4}{8} - \Phi \frac{u\delta u^3}{4} - \frac{P'\delta u^4}{8}$$

$$= n(MM_1 + M_1A - MA) - n'(M_1M'_1 + M'_1A' - M'A')$$

$$= 2nMA \frac{\sin \frac{u}{2} \sin \frac{\delta u}{2}}{\cos \frac{u + \delta u}{2}} - 2n'M'A' \frac{\sin \frac{u'}{2} \sin \frac{\delta u'}{2}}{\cos \frac{u' + \delta u'}{2}}$$

or, si Γ_t et γ_t sont les rapports de convergence tangentiels aux points $\mathcal{C}$ (où la caustique de sommet M_0 touche MA) et T (où MA est tangent à la caustique engendrée par M_1A), on a

$$MA = 2au^2 + \frac{1}{n} k_t (\Gamma_t - \gamma_t) + 3\varphi u \partial u + p \partial u^2$$

$$M'A' = 2a'u'^2 + \frac{1}{n} k_t \frac{\Gamma_t - \gamma_t}{\Gamma_t \gamma_t} + 3\varphi' u' \partial u' + p' \partial u'^2$$

et

$$\frac{P_1(u + \partial u)^4}{8} - \frac{Pu^4}{8} - \frac{\Phi u \partial u^3}{4} - \frac{P' \partial u^4}{8}$$

$$= k_t (\Gamma_t - \gamma_t) \left[\frac{\sin \frac{u}{2} \sin \frac{\partial u}{2}}{\cos \frac{u + \partial u}{2}} \left(1 - \frac{1}{\Gamma_t \gamma_t} \frac{\sin \frac{u'}{2} \sin \frac{\partial u'}{2}}{\sin \frac{u}{2} \sin \frac{\partial u}{2}} \cos \frac{u + \partial u}{2} \frac{u' + \partial u'}{2} \right) \right]$$

$$+ u^3 \partial u (na - n'a' \gamma_0^3 \gamma) + \frac{3}{2} u^2 \partial u^2 (n\varphi - n'\varphi' \gamma_0^2 \gamma^2) + \frac{1}{2} u \partial u^3 (np - n'p' \gamma_0 \gamma^3)$$

le premier terme du second membre peut être modifié de la façon suivante : on a $\frac{\sin u'}{\sin u \times \Gamma_t} = (1 + \mathcal{A}u^2)$, $\mathcal{A}$ étant déterminé par la

relation (7', 2^e partie) $\frac{\sin \partial u'}{\gamma_t \sin \partial u}$ tend vers 1 lorsque ∂u tend vers 0,

on peut l'écrire par raison de symétrie $\left(1 + \frac{y}{4} u \partial u + \frac{z}{4} \partial u^2\right)$, le terme

$$\text{considéré devient } 2 k_t (\Gamma_t - \gamma_t) \frac{\sin \frac{u}{2} \sin \frac{\partial u}{2}}{\cos \frac{u + \partial u}{2}} \left\{ 1 - \left[1 + u^2 \left(\mathcal{A} + \frac{\gamma_0^2 - 1}{4} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{u \partial u}{4} (\gamma_0 \gamma - 1 + y) + \frac{\partial u^2}{4} (\gamma^2 - 1 + z) \right] \right\}$$

la parenthèse est du second ordre; on peut donc, en négligeant les quantités du 6^e ordre, écrire

$$- \frac{k}{2} (\gamma_0 - \gamma) u \partial u \left[u^2 \left(\mathcal{A} + \frac{\gamma_0^2 - 1}{4} \right) + \frac{u \partial u}{4} (\gamma_0 \gamma - 1 + y) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u^2}{4} (\gamma^2 - 1 + z) \right]$$

on a dès lors l'identité

$$\begin{aligned} & \frac{P_1(u + \delta u)^4}{8} - \frac{Pu^4}{8} - \frac{\Phi u \delta u^3}{4} - \frac{P' \delta u^4}{8} \\ &= \frac{k}{2} (\gamma_0 - \gamma) u \delta u \left[u^2 \left(\mathcal{A} + \frac{\gamma_0^2 - 1}{4} \right) + \frac{u \delta u}{4} (\gamma_0 \gamma - 1 + y) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\delta u^2}{4} (\gamma^2 - 1 + z) \right] + u^3 \delta u (na - n'a' \gamma_0^3 \gamma) \\ & \quad + \frac{3}{2} u^2 \delta u^2 (n\varphi - n'\varphi' \gamma_0^3 \gamma^2) + \frac{1}{2} u \delta u^3 (np - n'p' \gamma_0 \gamma^3) \end{aligned}$$

Le terme en u^4 disparaît de lui-même; les autres coefficients des termes en $u \delta u$, $u^2 \delta u^2$, $u \delta u^3$ devront être soumis à l'identification; on peut voir d'ailleurs que le terme en δu^4 disparaît également; en effet, P_1 étant fonction de $\gamma_0 + \delta \gamma_0$, on aura

$$P_1 = P + \delta \gamma_0 \frac{dP}{d\gamma_0} + \frac{\delta \gamma_0^2}{1.2} \frac{d^2 P}{d\gamma_0^2} + \frac{\delta \gamma_0^3}{1.2.3} \frac{d^3 P}{d\gamma_0^3} + \frac{\delta \gamma_0^4}{1.2.3.4} \frac{d^4 P}{d\gamma_0^4}$$

mais le triangle MAM₁ nous donne à l'approximation considérée

$$\frac{\delta \gamma_0}{\delta u} = \frac{\gamma - \gamma_0 - \delta \gamma_0}{u} \quad \delta \gamma_0 = (\gamma - \gamma_0) \frac{\delta u}{u + \delta u}$$

on aura donc

$$\begin{aligned} P_1(u + \delta u)^4 &= P(u + \delta u)^4 + \frac{dP}{d\gamma_0} (\gamma - \gamma_0) \delta u (u + \delta u)^3 + \dots \\ & \quad + \frac{d^4 P}{d\gamma_0^4} \frac{(\gamma - \gamma_0)^4}{1.2.3.4} \delta u^4 \end{aligned}$$

or le coefficient de δu^4 est précisément P' ; il ne reste plus que les termes en $u^3 \delta u$, $u^2 \delta u^2$, $u \delta u^3$; ces deux derniers pourraient servir à la détermination de y et de z ; portons uniquement notre attention sur le terme en $u^3 \delta u$; il exigera

$$\begin{aligned} \frac{4Pu^3 \delta u}{8} + \frac{1}{8} \frac{dP}{d\gamma_0} (\gamma - \gamma_0) u^3 \delta u &= \frac{k}{2} (\gamma - \gamma_0) \left(\mathcal{A} + \frac{\gamma_0^2 - 1}{4} \right) u^3 \delta u \\ & \quad + u^3 \delta u (na - n'a' \gamma_0^3 \gamma) \end{aligned}$$

or

$$na - n'a' \gamma_0^3 \gamma = na - n'a' \gamma_0^3 + n'a' \gamma_0^3 (\gamma_0 - \gamma) = \frac{P}{2} - n'a' \gamma_0^3 (\gamma - \gamma_0)$$

le terme en P disparaît et il vient, en divisant par $\gamma - \gamma_0$,

$$\frac{1}{8} \frac{dP}{d\gamma_0} = \frac{k}{2} \left(\mathcal{A} + \frac{\gamma_0^2 - 1}{4} \right) - n' a' \gamma_0^3$$

or (2^e partie), $\mathcal{A} = \frac{1}{2k\gamma_0} (2A\gamma_0^2 + B\gamma_0 + 4n'a'\gamma_0^4)$

$$\frac{dP}{d\gamma_0} = 4A\gamma_0 + 2B + k(\gamma_0^2 - 1)$$

mais

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\gamma_0} &= 2A\gamma_0 + B + \gamma_0^2 \frac{dA}{d\gamma_0} + \gamma_0 \frac{dB}{d\gamma_0} + \frac{dC}{d\gamma_0} \\ &= 2\gamma_0 (2A_2\gamma_0 + A_1) + \gamma_0 (2B_2\gamma_0 + B_1) + 2C_2\gamma_0 + C_1 \\ &= 2\gamma_0 (A_2\gamma_0^2 + A_1\gamma_0 + A_0) + B_2\gamma_0^2 + B_1\gamma_0 + B_0 + k(\gamma_0^2 - 1) \\ A_1 + 2B_2 &= 2A_1 + k + B_2 & A_1 &= B_2 - k \\ B_1 + 2C_2 &= 2A_0 + B_1 & A_0 &= C_2 \\ C_1 &= B_0 - k & C_1 &= B_0 - k \end{aligned}$$

la démonstration antérieure nous avait donné en plus

$$A_0 = C_2 = \frac{B_1 - 2k^2V}{4}$$

La même identité va nous permettre de déterminer les coefficients de la fonction Φ ; le terme en u^2u^3 nous donne

$$\begin{aligned} -\frac{\Phi}{4} + \frac{1}{8} \left[4P + 3 \frac{dP}{d\gamma_0} (\gamma - \gamma_0) + \frac{d^2P}{d\gamma_0^2} (\gamma - \gamma_0)^2 + \frac{d^3P}{d\gamma_0^3} \frac{(\gamma - \gamma_0)^3}{1.2.3} \right] \\ = \frac{k}{8} (\gamma - \gamma_0) (\gamma^2 - 1 + z) + \frac{1}{2} (np - n'p'\gamma^4) + \frac{\gamma - \gamma_0}{2} n'p'\gamma^3 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{P'}{2} - \frac{P}{2} + \frac{\gamma - \gamma_0}{2} \frac{dP}{d\gamma_0} + \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{4} \frac{d^2P}{d\gamma_0^2} + \frac{(\gamma - \gamma_0)^3}{2.3.2} \frac{d^3P}{d\gamma_0^3} + \frac{d^4P}{d\gamma_0^4} \frac{(\gamma - \gamma_0)^4}{2.3.4.2} \\ \frac{1}{8} \frac{dP'}{d\gamma} = \frac{1}{8} \frac{dP}{d\gamma_0} + \frac{1}{8} (\gamma - \gamma_0) \frac{d^2P}{d\gamma_0^2} + \frac{1}{8} \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{2} \frac{d^3P}{d\gamma_0^3} + \frac{1}{8} \frac{(\gamma - \gamma_0)^3}{2.3} \frac{d^4P}{d\gamma_0^4} \end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned} -\frac{\Phi}{4} + \frac{P'}{2} - \frac{1}{8} \frac{dP'}{d\gamma} (\gamma - \gamma_0) \\ = \frac{k}{8} (\gamma^2 - 1 + z) (\gamma - \gamma_0) + \frac{P'}{4} + \frac{\gamma - \gamma_0}{2} n'p'\gamma^3; \end{aligned}$$

or, le coefficient z est évidemment indépendant de u , il a la même valeur pour $u = 0$; mais alors

$$\frac{\sin \delta u'}{\sin \delta u} = \gamma \left[1 + \frac{\delta u^2}{2} \left(\frac{1 - \gamma^2}{2} - \mathcal{A}' \right) \right]$$

avec
$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2k} (2A'\gamma + B' + 4n'p'\gamma^3)$$

$\mathcal{A}'$, A' , B' , étant les valeurs de $\mathcal{A}$, A , B , au point γ ;

$$z = 1 - \gamma^2 - 2\mathcal{A}'$$

et
$$\frac{k}{8} (\gamma^2 - 1 + z) = -\frac{k\mathcal{A}'}{4} = -\frac{2\mathcal{A}'\gamma + B'}{8} - \frac{1}{2} n'p'\gamma^3$$

$$\frac{P' - \Phi}{4} - \frac{1}{8} \frac{dP'}{d\gamma} (\gamma - \gamma_0) = -\frac{2\mathcal{A}'\gamma + B'}{8} (\gamma - \gamma_0)$$

d'où cette expression remarquable de Φ

$$\Phi = P' + \left(A'\gamma + \frac{B'}{2} - \frac{1}{2} \frac{dP'}{d\gamma} \right) (\gamma - \gamma_0)$$

mais,
$$\frac{dP'}{d\gamma} = 2A'\gamma + B' + \gamma^2 \frac{dA'}{d\gamma} + \gamma \frac{dB'}{d\gamma} + \frac{dC'}{d\gamma}$$

d'où :
$$\Phi = P' - \frac{1}{2} (\gamma - \gamma_0) \left(\gamma^2 \frac{dA'}{d\gamma} + \gamma \frac{dB'}{d\gamma} + \frac{dC'}{d\gamma} \right)$$

qui déterminera complètement les coefficients de Φ en fonction des six paramètres déjà introduits (en γ comprenant V si on admet

$$A_0 = C_2 = \frac{B_1 - 2k^2V}{4}.$$

Cette formule, qui conduit à la même expression générale de Φ , établit un lien remarquable entre la fonction d'aberration et la fonction de coma au même point γ .

Applications.

1° LENTILLES ACHROMATIQUES A FACES CONCENTRIQUES. *Condition d'aplanétisme*. — Dans la première partie, nous avons étudié la condition d'achromatisme d'un système formé de deux lentilles dont toutes les faces ont leurs centres confondus en un même point. Ce

point est assurément un point B *double* ; dès lors, au moyen d'une diaphragmation convenable, une telle lentille donnerait, d'un objet quelconque, une image ne présentant ni astigmatisme, ni distorsion, ni coma ; on peut aussi se préoccuper d'utiliser un tel dispositif pour obtenir en un point donné, sans diaphragme, une image aplanétique ; il est aisé de prévoir que l'existence de ces deux points B confondus entraînera celle de deux points aplanétiques (réels ou imaginaires) nécessairement inverses ; et ainsi la condition d'aplanétisme de l'un des foyers, rendra aussi l'autre foyer aplanétique.

Pour expliciter cette condition, formons la fonction d'astigmatisme

$$(1) \quad -Qu^2u_0^2 = k \frac{n}{(n-1)^2} (u_{0_1} - u_0)^2 \left(u_1 - \frac{u}{n}\right) (u_1 - nu) \\ + k_1 \frac{n}{(n-1)^2} (u_{0_2} - u_{0_1})^2 \left(u_2 - \frac{u_1}{n}\right) (u_2 - nu_1) \\ + k' \frac{n'}{(n'-1)^2} (u_{0_3} - u_{0_2})^2 \left(u_3 - \frac{u_2}{n'}\right) (u_3 - n'u_2) \\ + k'_1 \frac{n'}{(n'-1)^2} (u'_{0_3} - u_{0_3})^2 \left(u' - \frac{u_3}{n'}\right) (u' - n'u_3)$$

avec les notations déjà employées, si on pose

$$pk = 1, k_1 = K \quad p'_1 k'_1 = p'k' = K' \quad PK = P'K' = \mathfrak{K}$$

on a (p. 48) avec $p + p_1 = 1 \quad p' + p'_1 = 1 \quad P + P' = 1$

$$u_1 = p_1 u + p u_2 \quad u_3 = p'_1 u_2 + p' u' \quad u_2 = P u' + P' u \\ u_{0_1} = p_1 u_0 + p u_{0_2} \quad u_{0_3} = p'_1 u_{0_2} + p' u'_0 \quad u_{0_2} = P u'_0 + P' u_0.$$

L'élimination des angles intermédiaires conduit à :

$$-Qu^2u_0^2 = \mathfrak{K} (u'_0 - u_0)^2 \left\{ (u' - u)^2 \left[\frac{P^3 n}{(n-1)^2} \left(1 - p p_1 \frac{n^2 + n + 1}{n} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{P^3 n'}{(n'-1)^2} \left(1 - p' p'_1 \frac{n'^2 + n' + 1}{n'} \right) - P P' \right] - u u' \right\}$$

Il est bien visible : 1° que le point $\gamma_0 = 1$ est un point B double ;
2° que l'expression entre accolades, égale à 0, fournit deux valeurs

de γ pour lesquelles Q est nul quel que soit γ_0 , c'est-à-dire deux points Λ réels ou imaginaires; 3° que ces deux points sont bien inverses.

La condition d'aplanétisme des foyers sera donc :

$$\frac{P^3 n}{(n-1)^2} \left(1 - p p_1 \frac{n^2 + n + 1}{n} \right) + \frac{P'^3 n'}{(n'-1)^2} \left(1 - p' p'_1 \frac{n'^2 + n' + 1}{n'} \right) - P P' = 0$$

L'introduction des rayons de courbure, au moyen des formules

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_1} = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \quad \frac{1}{K'} = \frac{1}{k'} + \frac{1}{k'_1} = \frac{n'-1}{n'} \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'} \right)$$

donne

$$\begin{aligned} & \frac{P^3 n}{(n-1)^2} \left(1 + \frac{R R_1}{(R - R_1)^2} \frac{n^2 + n + 1}{n} \right) \\ & + \frac{P'^3 n'}{(n'-1)^2} \left(1 + \frac{R' R'_1}{(R' - R'_1)^2} \frac{n'^2 + n' + 1}{n'} \right) - P P' = 0 \end{aligned}$$

or, nous avons vu que la condition d'achromatisme s'écrit :

$$\frac{P}{n\gamma} - \frac{P'}{n'\gamma'} = \frac{1}{n\gamma - n'\gamma'}$$

ou encore

$$K n \gamma = - K' n' \gamma' = \varphi = \frac{n^2 \gamma R R_1}{(n-1)(R - R_1)} = - \frac{n'^2 \gamma' R' R'_1}{(n'-1)(R' - R'_1)}$$

Nous obtenons alors la condition d'aplanétisme des foyers, sous la forme

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{n^4 \gamma^3}{(n-1)^2} + n \gamma n' \gamma' (n \gamma - n' \gamma') - \frac{n'^4 \gamma'^3}{(n'-1)^2} \\ & + \varphi^2 \left(\frac{\gamma(n^2 + n + 1)}{n R_1^2} - \frac{\gamma'(n'^2 + n' + 1)}{n' R'^2} \right) \\ & - \varphi \left(\frac{n \gamma^2 (n^2 + n + 1)}{(n-1) R_1} - \frac{n' \gamma'^2 (n'^2 + n' + 1)}{(n'-1) R'} \right). \end{aligned}$$

Si nous nous plaçons dans le cas particulier déjà envisagé, qui satisfait à la condition de Clairaut, nous pourrions poser $R_1 = R' = 1$; et si de plus on veut donner à l'objectif la forme sphérique $R'_1 = -R$ on a

$$R = \frac{\frac{n'^2 \gamma'}{n'-1} + \frac{n^2 \gamma}{n-1}}{\frac{n'^2 \gamma'}{n'-1} - \frac{n^2 \gamma}{n-1}} \quad \text{et } \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{n'^2 \gamma'}{n'-1} + \frac{n^2 \gamma}{n-1} \right)$$

si enfin on pose $\rho = \frac{n'v'}{nv}$ l'aplanétisme des foyers et l'achromatisme exigeront la condition :

$$\rho^3 \left(\frac{n'}{(n'-1)^2} - 1 \right) - \rho^2 \left(\frac{(n^2 + n + 1)n'^2}{n^2(n'-1)^2} - 1 \right) + \rho \left(\frac{(n'^2 + n' + 1)n^2}{n'^2(n-1)^2} - 4 \right) - \left(\frac{n}{(n-1)^2} - 1 \right) = 0$$

Si on se donne $n' = 1,5$, $n = 1,62$, l'équation devient

$$5\rho^3 - 14\rho^2 + 10,4\rho - 3,21 = 0;$$

cette équation est satisfaite pour $\rho = 1,88$, ce qui exigerait $\frac{v'}{v} = 2$, par exemple $v' = 66,6$, $v = 33,3$.

Or, ces conditions ne sont pas absolument réalisables avec les verres des catalogues, car s'il existe des crown légers pour lesquels $v' = 66,6$, les verres d'indice 1,62 ont une valeur de v au moins égale à 36.

Terminons cependant le problème avec ces données; on trouve $R = 2,77$; avec une longueur focale d'environ 1,85.

On aurait une autre solution avec deux verres d'indices moyens presque identiques $n' = 1,5$, $n = 1,501$, $v' = 66,6$, $v = 56,6$ qui sont inscrits dans les catalogues, mais elle conduirait à une valeur de R beaucoup trop grande : 12,32.

D'ailleurs, en sacrifiant la condition $R'_1 = -R$ ou même la condition de Clairaut, on obtiendrait certainement une solution absolument pratique, et on peut conclure à la possibilité d'établir un objectif achromatique à faces concentriques, aplanétique pour ses foyers, ce qu'on ne pourra jamais obtenir avec une lentille *mince*, quel que soit le nombre des verres.

2° LENTILLES ACHROMATIQUES MINCES. — Il y a, en effet, une contradiction absolue entre l'emploi, dans les avant-projets, de la lentille infiniment mince, et la recherche de la condition d'aplanétisme (au foyer image de l'objectif astronomique par exemple); cette contradiction, qui a échappé jusqu'ici aux physiciens, est facilement mise en évidence au moyen des propositions démontrées dans le présent travail; supposer, en effet, une lentille infiniment mince, c'est admettre l'existence d'une surface aplanétique $\gamma = 1$ où sont confondues toutes les surfaces du système; dès lors, s'il existe une autre

surface aplanétique, elle est nécessairement située en un point inverse, c'est-à-dire précisément au point $\gamma = 1$; donc il ne peut exister de surface aplanétique en dehors de celle qui représente la lentille infiniment mince.

En revanche, cette hypothèse n'est pas contradictoire à l'existence d'un point B, et par suite on peut s'en servir pour établir l'avant-projet d'un objectif achromatique mince, destiné à la projection et présentant un point stigmatique B.

Ce point B pourra coïncider avec le point antinodal objet, le diamètre de l'objectif devant alors être le double du diamètre du cliché à projeter, et la source lumineuse ponctuelle étant placée au point B.

Reprenons la forme générale (p. 46) avec les mêmes notations, mais avec les conditions $p + p_1 = \frac{1}{n}$ $p' + p'_1 = \frac{1}{n'}$ $P + P' = 1$; l'élimination des termes $u_1 - \frac{u}{n}$ $u_2 - nu_1$ $u_3 - \frac{u_2}{n'}$ $u' - n'u_3$ conduit à l'expression

$$-Qu^2u_0^2 = \mathfrak{H}(u' - u) \left\{ \frac{n}{(n-1)^2} \left[(u_{01} - u_0)^2 (u_1 - nu) + (u_{02} - u_{01})^2 (nu_2 - u_1) \right] + \frac{n'}{(n'-1)^2} \left[(u_{03} - u_{02})^2 (u_3 - n'u_2) + (u'_0 - u_{03})^2 (n'u' - u_3) \right] \right\}$$

Si on pose $u_{01} - u_0 = Pp(u'_0 - u_0) - u'_0 \frac{n-1}{n} = \Phi_0$,
on a $u_{02} - u_{01} = P(u'_0 - u_0) - \Phi_0$;

de même, si on a $u'_0 - u_{03} = P'p'_1(u'_0 - u_0) + u'_0 \frac{n'-1}{n'} = \Phi'_0$,
 $u_{03} - u_{02} = P'(u'_0 - u_0) - \Phi'_0$

Avec ces notations on obtient :

$$\begin{aligned} -Qu^2u_0^2 = & \mathfrak{H}(u' - u) \left\{ \frac{Pn}{(n-1)^2} \left(\left[n(u' - u) \left(P(u'_0 - u_0) - \Phi_0 \right)^2 \right] \right. \right. \\ & - \left[Pp(u' - u) - u \frac{n^2-1}{n} \right] \left[P(u'_0 - u_0) - 2\Phi_0 \right] (u'_0 - u_0) \\ & + \frac{P'n'}{(n'-1)^2} \left(\left[n'(u' - u) \left(P'(u'_0 - u_0) - \Phi'_0 \right)^2 \right] - \left[P'p'_1(u' - u) \right. \right. \\ & \left. \left. + u' \frac{n'^2-1}{n'} \right] \left[P'(u'_0 - u_0) - 2\Phi'_0 \right] (u'_0 - u_0) \right) \left. \right\} \end{aligned}$$

Pour exprimer que le point γ_0 est un point B, il faut écrire que, pour cette valeur de γ_0 , la quantité entre accolades est nulle quel que soit γ , comme elle est du 1^{er} degré en γ , il suffira de l'annuler pour deux valeurs de γ .

Prenons $\gamma_0 = -1$ ou $u_0 = -u'_0$

$$\Phi_0 = u'_0 \left(2Pp + \frac{n-1}{n} \right) \quad \Phi'_0 = u'_0 \left(2P'p'_1 + \frac{n'-1}{n'} \right)$$

pour $u' = u$, on obtient la condition

$$P \frac{n+1}{n-1} \left[P(1-2p) - \frac{n-1}{n} \right] - P' \frac{n'+1}{n'-1} \left[P'(1-2p'_1) - \frac{n'-1}{n'} \right] = Z$$

Cette condition étant introduite dans la valeur de $Q, u' - u$ devient de nouveau facteur commun

$$\begin{aligned} -Qu^2 &= \mathfrak{K}(u' - u)^2 \left\{ \frac{Pn^2}{(n-1)^2} \left(P + \frac{Z}{P} \frac{n-1}{n+1} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 4Z \left(\frac{Ppn}{n^2-1} + \frac{P'p'_1n'}{n'^2-1} + 1 \right) + \frac{P'n'^2}{(n'-1)^2} \left(P' + \frac{Z}{P'} \frac{n'-1}{n'+1} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Éliminant p et p'_1 on a enfin la condition

$$\begin{aligned} Z^2 \left(\frac{n(n+2)}{P(n+1)^2} + \frac{n'(n'+2)}{P'(n'+1)^2} \right) - 2Z \left(\frac{P'n}{n+1} + \frac{Pn'}{n'+1} \right) \\ + \frac{P^2n^3}{(n-1)^2} + \frac{P'^2n'^3}{(n'-1)^2} = 0 \end{aligned}$$

Déterminons P et P' par la condition d'achromatisme

$$\frac{P}{v} = - \frac{P'}{v'} = \frac{1}{v - v'}$$

$$\begin{aligned} \text{On aura} \quad & v \frac{n+1}{n-1} \left[v(1-2p) - \frac{n-1}{n} (v - v') \right] \\ & = v' \frac{n'+1}{n'-1} \left[v'(1-2p'_1) + \frac{n'-1}{n'} (v - v') \right] = Z(v - v')^2 \\ & Z^2 (v - v')^4 \left(\frac{n(n+2)}{v(n+1)^2} + \frac{n'(n'+2)}{v'(n'+1)^2} \right) \\ & - 2Z (v - v')^2 \left(\frac{n'v}{n'+1} - \frac{nv'}{n+1} \right) + \frac{n^2v^3}{(n-1)^2} - \frac{n'^2v'^3}{(n'-1)^2} = 0 \end{aligned}$$

Le problème est ainsi résolu pour un système dont les indices et les dispersions sont donnés; par exemple, si $n = 1,6$, $v = 40$, $n' = 1,5$, $v' = 60$,

$$Z^2 + 2Z \times 4,4 - 1275 = 0$$

deux solutions :

$$Z = -40,4 \quad Z = +31,6;$$

si on prend la première,

$$p'_1 = +0,893 = \frac{R'}{n'(R' - R'_1)} \quad \text{et} \quad \frac{R'}{R'_1} = 4$$

$$p = +1,75 = -\frac{R_1}{n(R - R_1)}, \quad \frac{R_1}{R} = 1,555$$

et enfin l'équation d'achromatisme :

$$\frac{n-1}{v} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) = -\frac{n'-1}{v'} \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'} \right)$$

donnera, pour l'une des solutions, le rapport $\frac{R_1}{R'} = \frac{1}{3}$; en prenant tous les rayons (origine au sommet) négatifs, on a un ménisque divergent en avant (flint), puis un ménisque convergent (crown).

$$R_1 = 3,7 R_1.$$

La deuxième solution paraît plus avantageuse $\frac{R'}{R_1} = 0,97$.

RÉSUMÉ

Je puis dire sans trop d'exagération : ceci est un livre neuf ; car si l'on y rencontre quelques propositions déjà connues, les démonstrations y revêtent des formes entièrement nouvelles.

D'ailleurs le décompte des exposés nouveaux de questions résolues, un peu importantes, que j'ai dû introduire dans cette théorie, dans le but d'en assurer le développement homogène, sera bientôt fait ; il comprend : dans la première partie, la théorie élémentaire des systèmes centrés (approximation de Gauss) ; dans la deuxième partie, la relation de Petzval ; dans la troisième, la condition des sinus.

Je voudrais maintenant attirer l'attention sur les points suivants :

PREMIÈRE PARTIE

La forme que j'ai adoptée, pour exposer les théories élémentaires, fait ressortir l'importance de l'usage systématique d'une variable : le rapport de convergence γ , qui présente les avantages suivants :

1° γ représente à la fois le point objet et le point image ;]

2° En utilisant cette variable on peut passer d'un système à un autre sans préoccupation d'origine, grâce à une relation que j'ai établie (formules 15, 15' ; 1^{re} partie).

3° Si on prend γ sous la forme $\frac{u'}{u}$, on introduit des variables homogènes, dont l'emploi simplifie notablement les éliminations.

Avec cette variable, j'ai pu tout d'abord établir, assez simplement, les expressions de la convergence et des distances frontales, au moyen de formules plus générales que celles qui ont intéressé Côtes, Lagrange, Euler etc..., et j'ai complété cette question par l'indication

d'une détermination semi-graphique rapide des éléments d'un système centré.

Je signalerai ensuite, comme nouvelle, l'extension des formules élémentaires qui lient les points sur l'axe, aux focales formées sur deux directions conjuguées rencontrant l'axe (chapitre III).

Enfin j'ai pu mettre en équations d'une façon rationnelle et générale le problème de l'achromatisme (1^{re} approximation) en le liant à une fonction, que j'ai nommée fonction de chromatisme, dont le calcul est théoriquement facile (page 38 et suivantes.)

DEUXIÈME PARTIE

Dans la deuxième partie est posée la question de la correction des aberrations géométriques en 2^e approximation; la solution que je propose a l'avantage de faire dépendre ces aberrations, et par suite leur correction, de quatre fonctions correspondant aux quatre défauts bien connus; ces fonctions ne contiennent en tout que cinq paramètres nouveaux, distincts. Si on n'avait en vue que les dioptries sphériques, ou même à méridienne du second degré, le calcul de ces fonctions ne comporterait guère plus de difficultés, que celui de la fonction de chromatisme, pourvu que l'on ait préalablement établi, comme je l'ai fait, les formules qui conviennent aux dioptries dont les sections principales sont des coniques; mais les retouches locales pouvant modifier d'une façon arbitraire ces méridiennes, il était nécessaire de présenter ces fonctions indépendamment de la forme des sections principales des dioptries (chapitre IV)

Ces quatre fonctions sont : la fonction d'aberration (page 52), la fonction de coma (page 55), la fonction d'astigmatisme (page 57), la fonction de distorsion (page 67).

Je proposerai de les appeler *fonctions iconales*, les deux premières ayant d'ailleurs une relation très étroite avec l'eikonal ordinaire; uniquement par leur forme, elle révèlent un certain nombre de propriétés dont quelques unes n'avaient pas été remarquées jusqu'ici; par exemple, sur l'axe, les quatre points stigmatiques (page 53); sur des directions inclinées les trois points sans coma (ou points de Fermat), (page 57), et le point sans distorsion (page 67).

Ces fonctions m'ont permis d'établir des propriétés, non encore

étudiées, des surfaces lieux de points sans astigmatisme (points de Petzval), et en particulier dans quels cas, assez rares, on peut appliquer la condition bien connue de Petzval (page 108).

Mais ces fonctions, et la fonction de chromatisme, acquièrent surtout une grande importance par l'application qu'on peut en faire au calcul de systèmes de lentilles, importance que je me propose de souligner à la fin de ce résumé.

TROISIÈME PARTIE

Cette partie est surtout réservée à l'étude des points stigmatiques remarquables, qui correspondent aux conditions :

$$(1) \sin \frac{u'}{2} : \sin \frac{u}{2} = h \quad (2) \sin u' : \sin u = \alpha \quad (3) \operatorname{tg} \frac{u'}{2} : \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \beta$$

les trois constantes : h , α , β , étant évidemment des rapports de convergence.

(1) Le premier, ou point d'Herschel, doit, comme je l'ai montré (page 140), être rayé de la science, si on ne veut pas se contenter de le regarder comme un point stigmatique multiple. C'est là une conclusion négative nouvelle, qui a, scientifiquement, une importance égale à celle de l'affirmation d'une propriété auparavant inconnue.

(2) Abbe et l'école allemande appellent point aplanétique, un point stigmatique soumis à la condition des sinus : cette définition a deux graves défauts : d'abord les points de la surface image correspondante ne sont corrigés que du coma, et l'astigmatisme y est, en général, du 2^e ordre ; ensuite, Abbe a le tort d'englober dans une même définition, des points qui ont des propriétés incompatibles (en particulier les points aplanétiques du dioptré et son centre). — J'ai dû appeler point stigmatique d'Abbe ou point a un point stigmatique soumis à la seule condition des sinus et réserver le nom d'aplanétique, et la notation Λ , à un point soumis en outre à une troisième condition que j'ai formulée en 2^e approximation (page 114) et en toute rigueur (page 149).

(3) Si le point Λ précise le lieu où l'on doit recueillir la meilleure image, aucune donnée scientifique n'intervenait pour déterminer la meilleure position du diaphragme.

Cette dernière recherche m'a amené à définir un point B tel, que la diaphragmation en ce point, permette d'obtenir pour toutes les positions de l'objet, une image, dont les points en dehors de l'axe, ont les mêmes propriétés (sauf le coma) que les points sur l'axe.

Ce point remarquable caractérisé par la constance du rapport $\text{tg } \frac{u'}{u} : \text{tg } \frac{u}{2}$, exige trois conditions comme le point A (page 118 page 158.

Enfin, une étude détaillée des couples de surfaces (2 surfaces objet, 2 surfaces image), et en particulier des couples aplanétiques, m'a permis d'établir les relations qui lient nécessairement ces surfaces entre elles et aux couples de points B, dont l'existence est nécessairement corrélatrice (page 169 et suivantes).

Après cette revue incomplète, je voudrais insister sur les conséquences pratiques du présent travail, au point de vue du calcul des combinaisons de lentilles.

Le problème de la correction des défauts d'un système centré est résolu actuellement à l'aide des équations de Seidel. Je propose de le résoudre par la détermination des coefficients qui figurent dans les fonctions iconales. Où est le progrès? Il consiste en ce que, les équations actuelles étant présentées sous forme d'expressions dans lesquelles figure le signe Σ , sous ce signe, on trouve des quantités qu'il est possible de calculer arithmétiquement pour un point *donné* lorsque le système est *donné*, mais non, si on laisse le système *indéterminé*; tandis que dans la méthode que je propose, le calcul des coefficients étant effectué algébriquement, les paramètres du système pourront être déterminés de manière à donner à la combinaison optique *l'ensemble des propriétés qu'on veut lui imposer*; j'ai donné (page 189 et suivantes) quelques exemples extrêmement simples de cette méthode.

J'ai dû introduire dans ce travail quelques expressions rendues nécessaires par les considérations nouvelles que j'ai présentées.

Points inverses : dont les rapports de convergence ont des valeurs inverses.

Convergence d'un système centré : $\frac{n n'}{k} = \frac{n}{f} = - \frac{n'}{f'}$

Points et surfaces de Petzval : points et lieux de points sans astigmatisme.

Points et surfaces de Fermat : points et lieux de points sans coma.

Points quasi-stigmatiques : points sans astigmatisme ni coma.

Surfaces de Petzval stabilisées ou surfaces quasi-aplanétiques : lieux de points sans astigmatisme ni coma.

Points stigmatiques de Abbe ou points a : soumis uniquement à la condition des sinus (suppression du coma dans l'image).

Points aplanétiques A : suppression du coma et de l'astigmatisme.

Points stigmatiques b : points qui, sur toutes les directions, coïncident avec un point de Petzval double.

Points stigmatiques B : points tels que sur toutes les directions conjuguées qui les contiennent tous les points sont des points de Petzval.

Vu et approuvé :

Paris, le 22 juin 1922.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
R. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
P. APPELL.

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Étude des mixtes et combinaisons que forme le soufre avec le phosphore.

Vu et approuvé :

Paris, le 22 juin 1922.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

R. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

P. APPELL.

> < 1 0 +

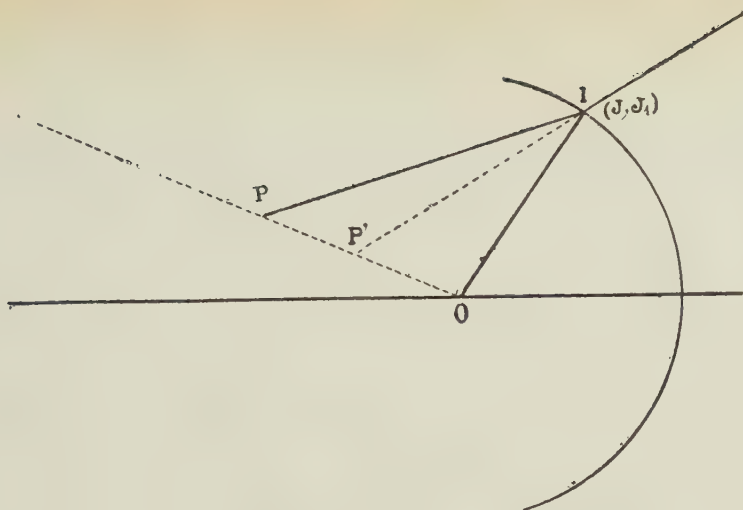


FIG. 1.

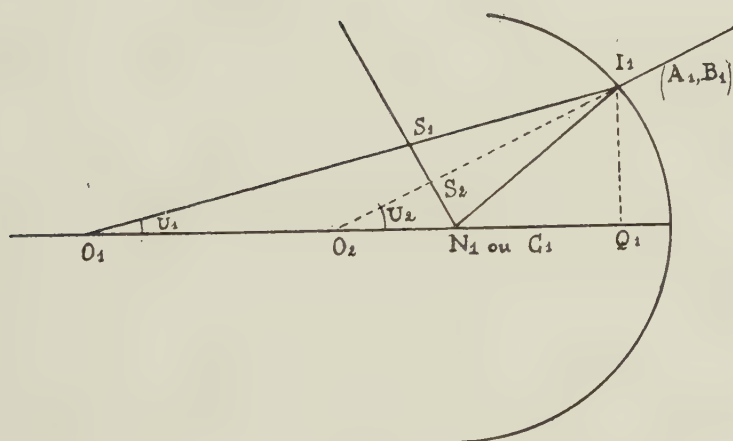


FIG. 2.

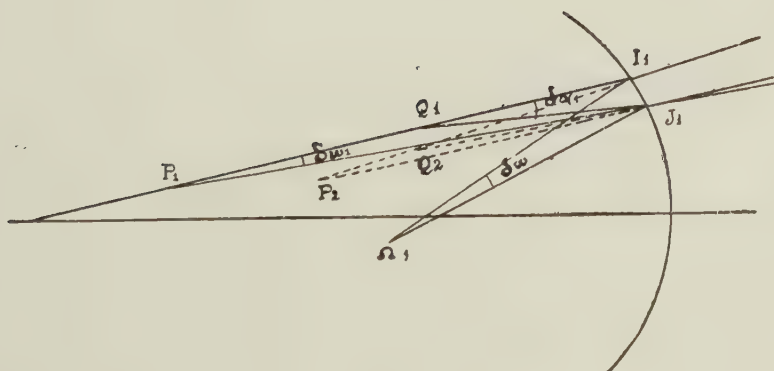


FIG. 3.



FIG. 4.

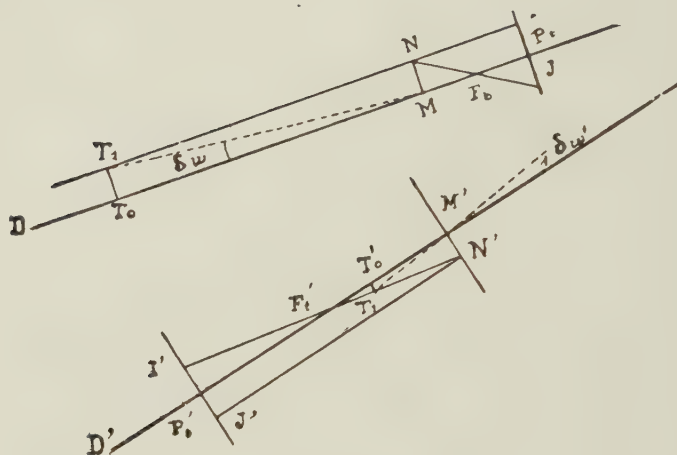


FIG. 4 bis.

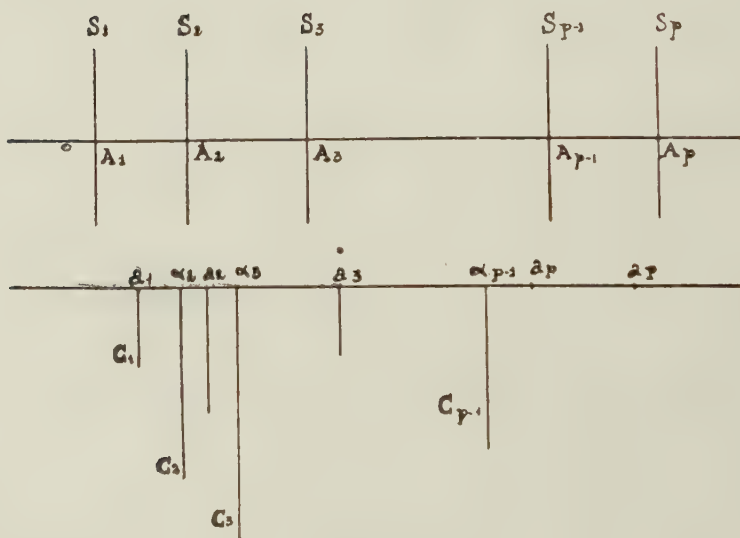
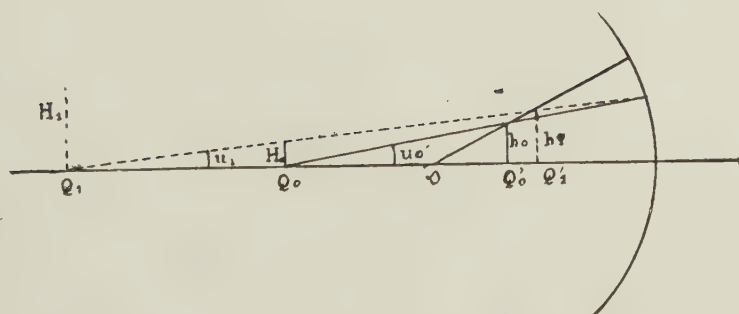
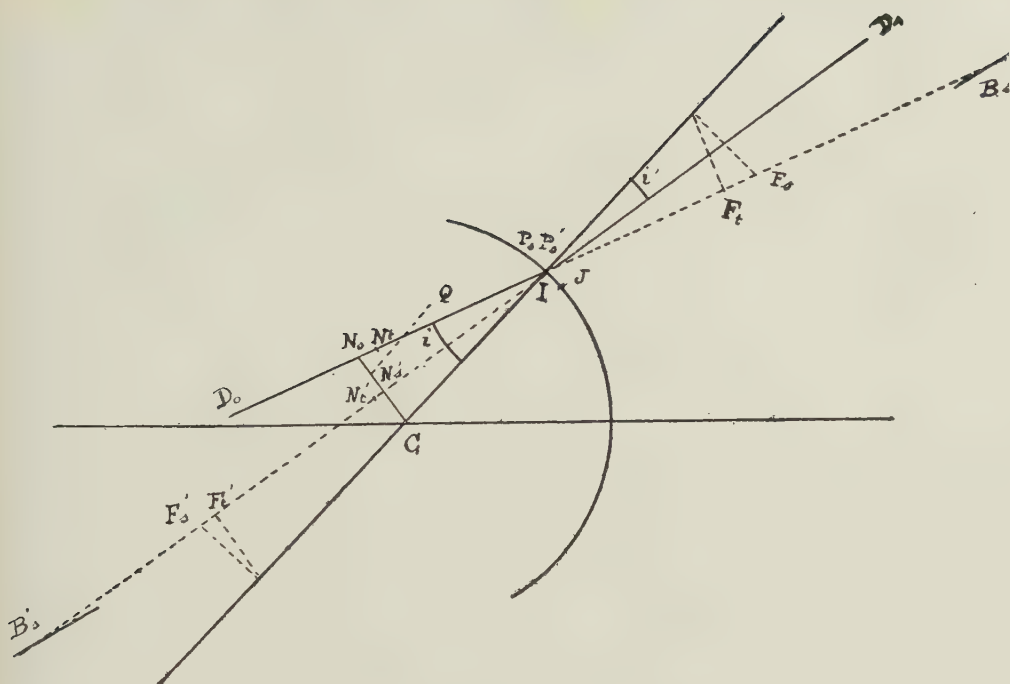


FIG. 5.



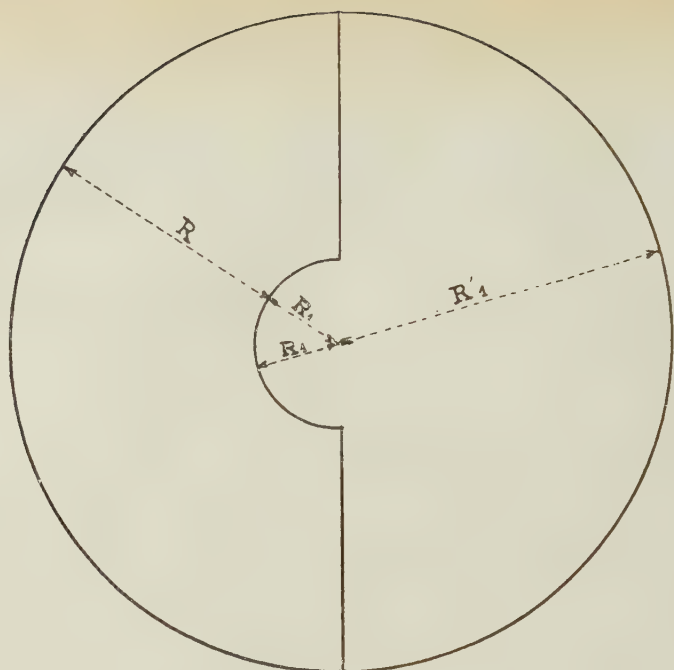


FIG. 8.

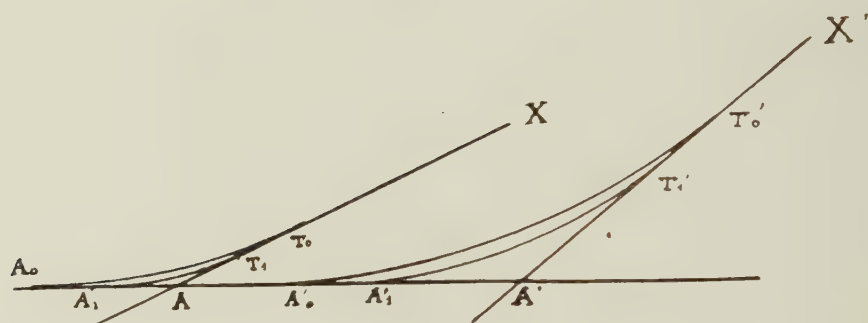


FIG. 9.

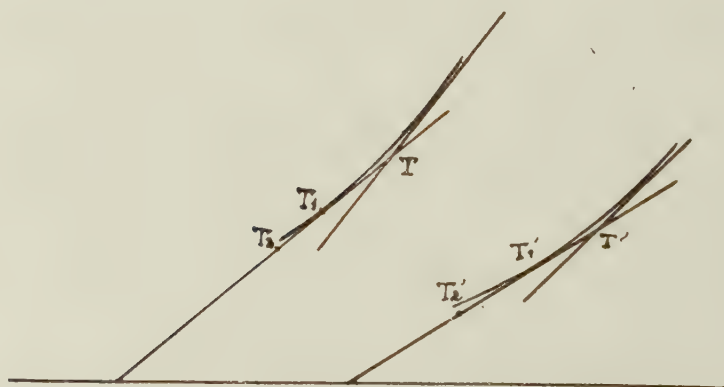


FIG. 9 bis.

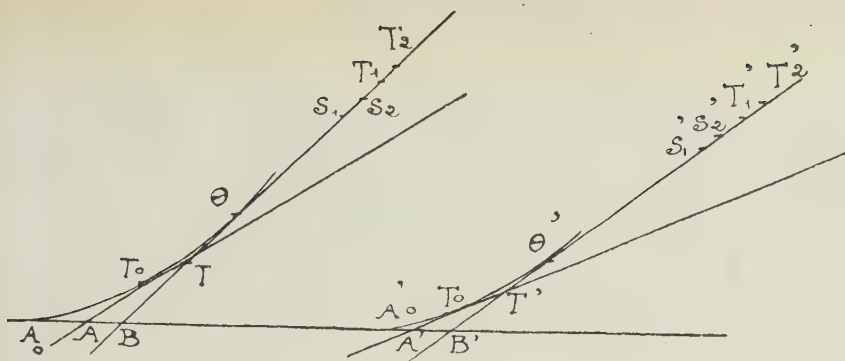
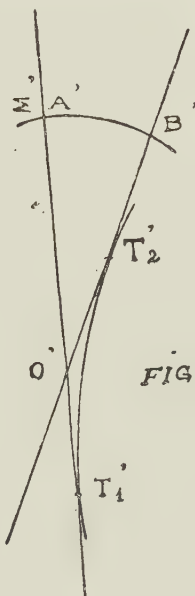
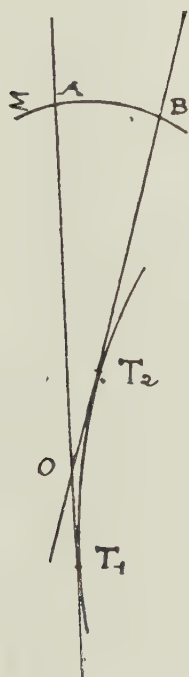


FIG. 9 *lev.*



FIG

FIG. 10.

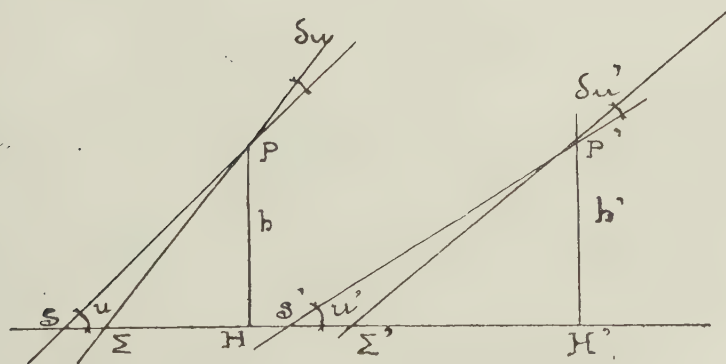


FIG. 11.

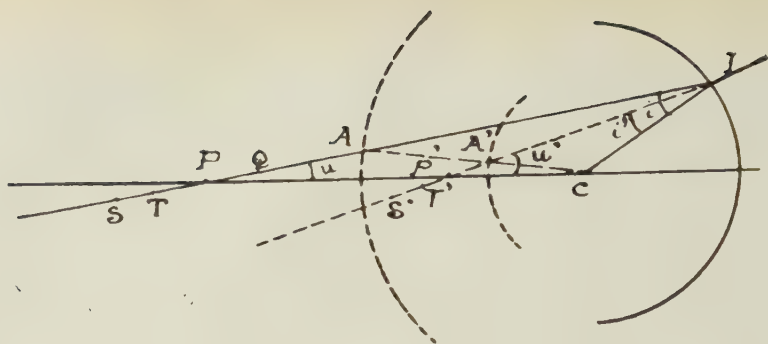


FIG. 12.

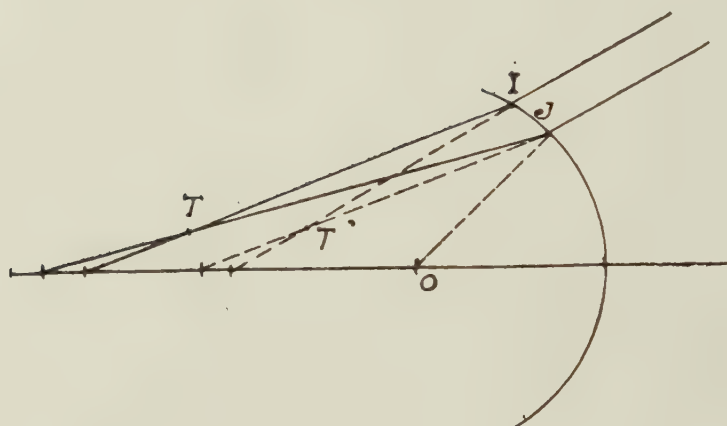


FIG. 13.

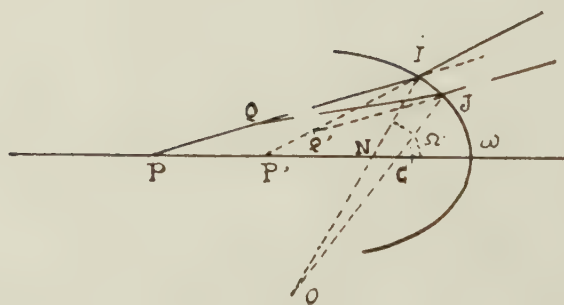


FIG. 14.

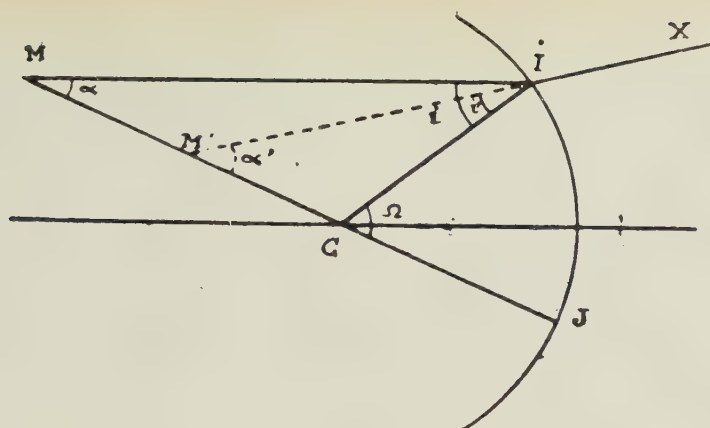


FIG. 15.

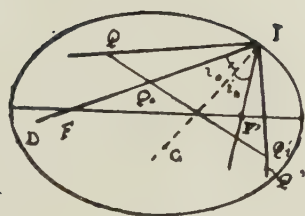


FIG. 16.

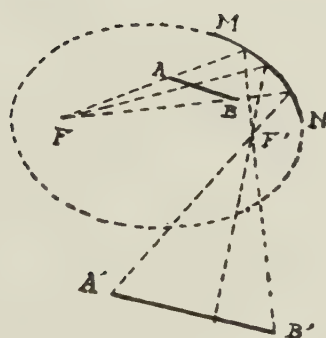


FIG. 16 bis.

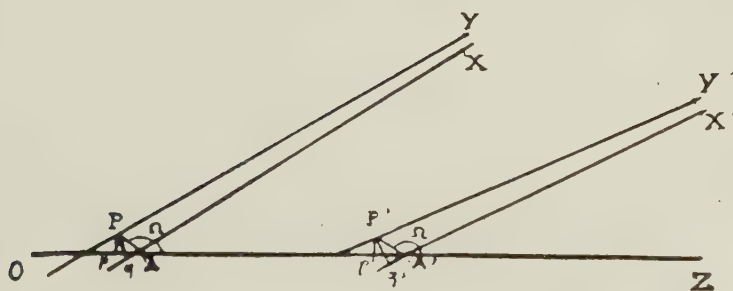


FIG. 17.

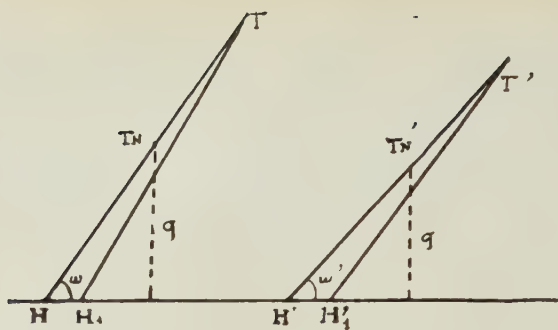


FIG. 18.

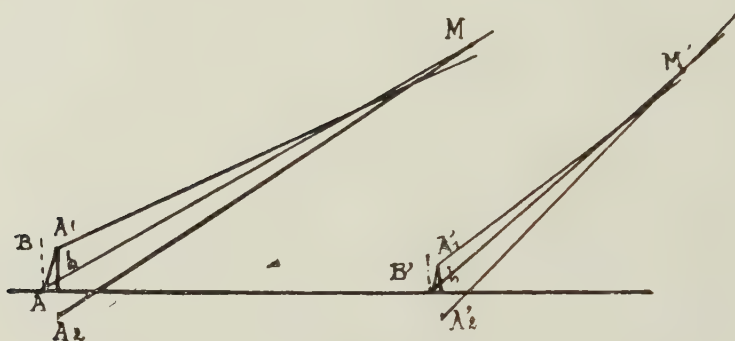


FIG. 19.

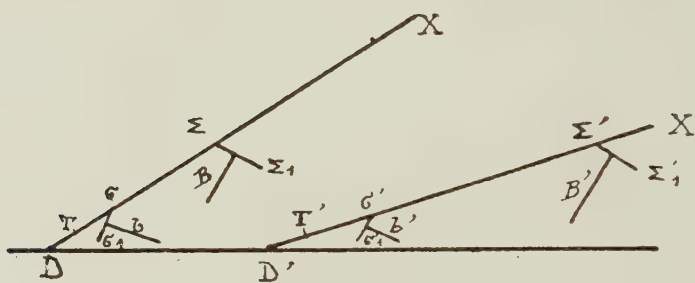


FIG. 20.

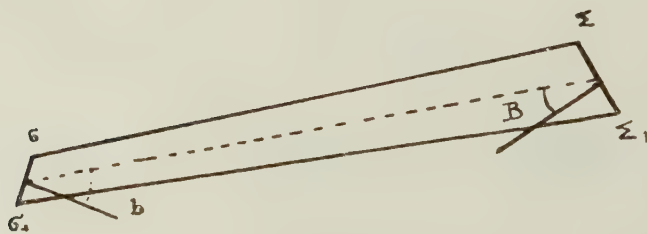


FIG. 20 bis.

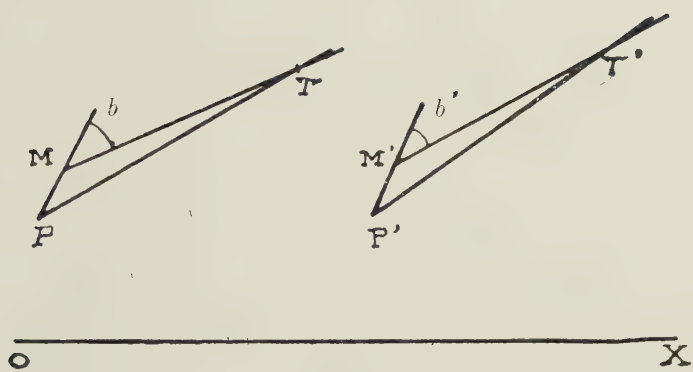


FIG. 21.

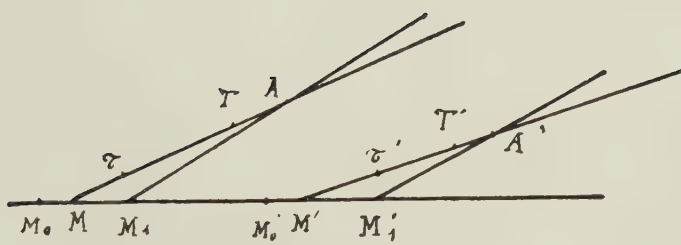


FIG. 22.

ERRATUM

		au lieu de	lire
page 8	ligne 8	$n^2 l^2$	$n_2 l_2$
11	3	n_{p+1}	n_{q+1}
15	2	X'	X
15	3	X	X'
20	19	$\gamma' n_0 x_0$	$\gamma' n'_0 x'_0$
25	22	$\frac{c_1}{C}$	$\frac{c_1}{C_2}$
25	28	C_1	C_2
		C_3	C_3
36	5	$\frac{i' + i'}{2}$	$\frac{i + i'}{2}$
59	3	un signe = entre	$\frac{\sin(u + \partial u)}{\sin \partial u}$ et la parenthèse
68	12	()	(9)
69	10	$(k^2 \gamma_0 - \gamma)^2$	$k^2 (\gamma_0 - \gamma)^2$
71	10	Λ	$\mathcal{A}$
73	20	$\frac{d}{du} \frac{1}{k}$	$\frac{d}{du} \frac{1}{k_s}$
74	12	$-\frac{B}{k} -$	$-\frac{B}{k} \Big) -$
74	19	galons	égalons
76	17	$2B_0 + k$	$2B_0 - k$
76	dernière ligne	$+ \frac{dB}{d\gamma_0} +$	$+ \gamma \frac{dB}{d\gamma_0} +$
77	11	$\gamma_0 B_0]$	$\gamma_0 - B_0]$
77	dernière ligne	1 ^{re} égalité au	
		dénominateur C_1	C_2
78	19	γ_3	γ^2

page	ligne	au lieu de	lire
80	12	$\frac{n \cos i + n' \cos i'}{n}$	$\frac{n \cos i + n' \cos i'}{n + n'}$
84	1	$i' + \delta i'$	$i + \delta i$
99	5	1	1
		k_2^2	$\bar{k}^2$
99	20	$(\Gamma_0 - \gamma_0)$	$(\Gamma_0 - \gamma_0)^2$
120	dernière		
	ligne	$+ C = O_0$	$+ C_0 = 0$
124	9	$2kV(x - \beta)$	$2kV(x - \beta)$
129	22	$\frac{k}{1} \gamma + 1$	$\frac{k}{1} \gamma - 1$
137	5		crochet à la fin de la ligne
154	15	$\frac{k^2}{2 \alpha n'}$	$\frac{k^2}{2 \alpha n' \bar{R}}$
154	19	$\Lambda \alpha$	$\Lambda_2 \alpha$
156	2		ouvrir un crochet après $\frac{n^4 h^4}{4 k^4 x}$
174	19	dans la parenthèse	
		$1 - \text{-----}$	$1 + \text{-----}$
200	17	Seiler	S idel

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE	I ^{er} . — Focales.	1
	Formes adoptées pour les relations homographiques.	4
	Conditions d'application du principe de Fermat.	8
	Éliminations.	9
CHAPITRE	II. — Approximation de Gauss.	13
	Systèmes à foyers.	16
	Systèmes afocaux.	19
	Combinaison de systèmes.	20
	Formules générales de la convergence et des distances frontales.	22
	Calcul semi-graphique de la convergence.	24
CHAPITRE	III. — Étude d'un système centré suivant deux droites conjuguées contenues dans une section principale.	27
	Équations résultantes.	33
	Application à un dioptré.	34
	Sur les aberrations chromatiques et sur l'achromatisme.	38
	Aberrations chromatiques angulaires et latérales.	41
	Applications.	45

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE	IV. — Théorie des systèmes centrés, 2 ^e approximation.	51
	Fonction d'aberration.	52
	Coma, astigmatisme, inégale dilatation.	53
	Fonction de coma.	55
	Fonction d'astigmatisme.	57
	Astigmatisme et coma sur l'axe.	58
	Points de Petzval stabilisés.	59
	Variation du chemin optique dans un plan de symétrie du pinceau.	61
	Inégale dilatation, formes approchées des focales.	61
CHAPITRE	V. — Réduction du nombre des coefficients :	
	1 ^o Fonction d'astigmatisme.	73
	2 ^o Fonction de coma.	76
	Formules des fonctions iconales.	78

CHAPITRE VI.	Dioptré sphérique	86
	Dioptré ellipsoïdal de révolution.	87
CHAPITRE VII.	Calcul des paramètres	97
CHAPITRE VIII.	Étude expérimentale d'un objectif.	105
CHAPITRE IX.	Sur l'application de la condition dite de Petzval. . .	108
	Surfaces de Petzval indéterminées. — Réciproques .	108
	Condition des sinus	111
	Points stigmatiques A	114
	Points stigmatiques B.	117

TROISIÈME PARTIE

CHAPITRE X.	— Points stigmatiques	125
CHAPITRE XI.	— Étude des points stigmatiques.	132
	Condition générale du stigmatisme.	132
	Point stigmatique d'Herschel.	133
	Inexistence du point d'Herschel.	140
	Systèmes centrés à points stigmatiques multiples. .	143
CHAPITRE XII.	— Points stigmatiques d'Abbe. — Points <i>a</i> , A.	146
	Points <i>b</i> et B	157
	Critères expérimentaux permettant de reconnaître les points remarquables précédemment étudiés. .	161
CHAPITRE XIII.	— Surfaces de Petzval formant des couples quasi-aplanétiques.	163
	Couples de surfaces aplanétiques. — Points A et points B.	169
	Conditions de l'aplanétisme hors de l'axe.	182
	Retour à la réduction des coefficients.	185
	Applications.	189

RÉSUMÉ

Quelques expressions employées.	200
FIGURES	207
ERRATUM	217

Bordeaux. — Imprimeries GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 9-11.

